අවකලනය

$\frac{d[y]}{dx}$ x විෂයෙන් වූ, y විෂය වන ව්‍යුත්පන්නය.

K යනු නියතයක් නම්,

$$\frac{d}{dx}[k] = 0$$

$$\frac{d}{dx}[k f(x)] = k \frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[g(x) + f(x)] = \frac{d}{dx}[g(x)] + \frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[g(x) - f(x)] = \frac{d}{dx}[g(x)] - \frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[x^n] = n . x^{(n-1)}$$

$\frac{d[x]}{x} = 1$	$\frac{d[\sqrt{x}]}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{d[1/x]}{dx} = \frac{-1}{x^2}$

$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\operatorname{cosec}^2 x$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \cot x$
$\frac{d}{dx}[\log_e x] = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	

u හා v යනු x වල ශ්‍රිතයන් නම්,

$$\frac{d}{dx}[u.v] = u \frac{d[v]}{dx} + v \frac{d[u]}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v \frac{d[u]}{dx} - u \frac{d[v]}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\sin^{-1} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\cos^{-1} x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tan^{-1} x] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\cot^{-1} x] = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec^{-1} x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec}^{-1} x] = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

සරල ශ්‍රිත යන x වෙනුවට x හි වෙනත් ශ්‍රිතයක් ආදේශ වූ. එම ශ්‍රිතය X ලෙස අංකනය කෙරේ.

$$y = (X)^{10}$$

$$\frac{dy}{dx} = 10.(X)^9 . \frac{d}{dx}[X]$$

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{X}] = \frac{1}{2\sqrt{X}} . \frac{d}{dx}[X]$$

$$\frac{d}{dx}[e^X] = e^X . \frac{d[X]}{dx}$$

$$y = \ln(X)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{X} . \frac{d[X]}{dx}$$

$$y = \sin(X)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(X) . \frac{d[X]}{dx}$$

* $\cos(X)$, $\tan(X)$, $\cot(X)$, $\sec(X)$, $\operatorname{cosec}(X)$ ද මේ ආකාරයට සිදුවේ.

$$y = \sin^{-1}(X)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(X)^2}} . \frac{d}{dx}[X]$$

* $\cos^{-1}(X)$, $\tan^{-1}(X)$, $\cot^{-1}(X)$, $\sec^{-1}(X)$, $\operatorname{cosec}^{-1}(X)$ ද මේ ආකාරයට සිදුවේ.

a^x ආකාරයේ ශ්‍රිත සඳහා ක්‍රම

පියවර: $a^x = e^t$ ලෙස ගෙන දෙපසටම ලඝුගණකය ගෙන සුළු කර අවකලනය කරන්න.

ශ්‍රිතයක ශ්‍රිත සිද්ධාන්තය

y යනු u වල ශ්‍රිතයක්ද u යනු x වල ශ්‍රිතයක්ද වනවිට.

$y = f(u)$, $u = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

පරස්පර සිද්ධාන්තය

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

උදා: $\sin\theta$; x විෂයෙන් අවකලනය කරමු

$$\frac{d[\sin\theta]}{dx} = \frac{d[\sin\theta]}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

ප්‍රාචල ආකාර ශ්‍රිත අවකලනය (x, y)

පියවර: විචල්‍ය දෙක අතර සම්බන්ධය දෙපසම ලබාගන්න. දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය කර $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ සොයාගන්න.

ව්‍යංග ශ්‍රිත අවකලනය

පියවර: සෑම පදයක්ම x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න. $\frac{dy}{dx}$ පද එක් පැත්තකට ගෙන සමීකරණය සුළු කරන්න.

ලඝුගණක මගින් අවකලනය

① ගුණිත හෝ බෙදුම් සහිත ශ්‍රිතයක් ඇති විට, [3 හෝ ඊට වැඩි ගුණිත, (2 වඩා) $\frac{(\ )(\ )}{(\ )(\ )}$ ලෙස බෙදුම (වඩා)]

② බලයේ විචල්‍යයක් ඇති අවස්ථාවල (හෝ $a^x = e^t$ ආකාර භාවිතයෙන්)

පියවර: දෙපසටම ln යොදන්න.
- දෙපස x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

අවකලනය කිරීමෙදී
- ලඝු නීති භාවිතා කර සුළු කරන්න

$\times \longrightarrow (+)$

$\wedge \longrightarrow (\times)$

$\div \longrightarrow (-)$

③ විචල්‍ය ද්විත්ව ඇති අවස්ථාවල

එක් බලයක විචල්‍යයක් ඇතිවිට වෙන් කළ යුතු අවස්ථා (උදා: $y = x^x + 2^x$)

උදා:
පියවර: පද වලට වෙන වෙනම නම් කරන්න

$$y = \underbrace{x^x}_{y_1} + \underbrace{2^x}_{y_2}$$

- ලඝු යෙදිය යුතු පද වෙනම ලියන්න.
- වෙන වෙනම අවකලනය කරන්න.

$\frac{d[y_1]}{dx}$ / $y_1 = x^x$
- දෙපසටම ln යොදන්න
- ලඝු නීති මගින් සුළු කරන්න.
- දෙපස x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

//

- ලබාගත් පද මුළු අවකලනයට ආදේශ කරන්න.

ඉහළ ගණයේ අවකලන සංගුණකය

ඉහළ ගණයේ ව්‍යුත්පන්න / අනුයාත අවකලනය

අංකනය 1:

① $\frac{dy}{dx}$ = y වල පළමුවෙනි අවකලන සංගුණකය

② $\frac{d^2y}{dx^2}$ = y හි දෙවෙනි අවකලන සංගුණකය

③ $\frac{d^3y}{dy^3}$ = y හි තුන්වෙනි අවකලන සංගුණකය

අංකනය 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{dx}$$

අංකනය 3:

$\frac{dy}{dx} = y'$ | $\frac{d[f(x)]}{dx} = f'(x)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ | $\frac{d^2[f(x)]}{dx^2} = f''(x)$

$\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$

අවකලනය
[ව්‍යුත්පන්න]

අවකලනය

① $\frac{d}{dx}[y]$

y ව, x විෂයෙන් අවකලනය කිරීම
y ව, x අනුව අවකලනය කිරීම
y හි, x විෂයෙන් ව්‍යුත්පන්නය

② $\frac{d(y)}{dx}$ x වෙනස්වන විට, y වෙනස්වන ශීඝ්‍රතාව

අවකලනය
- ① මූල ධර්ම මඟින් අවකලනය
- ② සම්මත සූත්‍ර මඟින් අවකලනය
- ③ අවකලනයේ යෙදීම්.

② සම්මත සූත්‍ර මඟින් අවකලනය

අවකලනයේ ප්‍රමේයයන්

(01) නියත ශ්‍රිතයක අවකලනය :-

K නියතයක් නම්,

$$\frac{d}{dx}[K] = 0$$

උදා: $\frac{d[-4]}{dx} = 0$

(02) නියතයක් සහ ශ්‍රිතයක් ගුණ වී ඇති විට එම නියතය අවකලනයෙන් පිටතට ගත හැක

$$\frac{d}{dx}[k f(x)] = k \frac{d}{dx}[f(x)]$$

උදා: $\frac{d[3\tan\theta]}{dx} = \frac{3\, d[\tan\theta]}{dx}$

(03) ඓක්‍යයක අවකලනයක්, එක එකක් වෙන වෙනම අවකලනවල එකතුවයි

$$\frac{d}{dx}[g(x)+f(x)] = \frac{d}{dx}[g(x)] + \frac{d}{dx}[f(x)]$$

උදා: $\frac{d}{dx}[x^7 + \sin x]$

$= \frac{d}{dx}[x^7] + \frac{d}{dx}[\sin x]$

(04) අන්තරයක අවකලනයක්, එම පද වෙන වෙනම අවකලනවල අන්තරය වේ.

$$\frac{d}{dx}[g(x)-f(x)] = \frac{d}{dx}[g(x)] - \frac{d}{dx}[f(x)]$$

ඝාත / පරිමේය බල ශ්‍රිතවල සම්මත අවකලන සූත්‍ර.

(01) n පරිමේය සංඛ්‍යාවක් වන විට

$$\frac{d}{dx}[x^n] = n.x^{(n-1)}$$

උදා: $\frac{d[\sqrt{x}]}{dx} = \frac{1}{2}.x^{(\frac{1}{2}-1)}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

උදා: $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^{3/2}}\right] = \frac{d}{dx}[x^{-3/2}]$

$= \frac{-3}{2}.x^{(-\frac{3}{2}-1)}$

$= \frac{-3}{2}.x^{-\frac{5}{2}}$

$= \frac{-3}{2(x^{\frac{5}{2}})}$

මූලධර්ම

③ $\frac{d}{dx}[x^9+x^2+5]$

$= \frac{d}{dx}[x^9] + \frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d[5]}{dx}$

$= (9.x^8) + 2.x^1 + 0$

$= 9x^8 + 2x$ //

⑤ $\frac{d[x^{10}-x^8]}{dx}$

$= 10x^9 - 8x^7$ //

$\frac{d[x]}{dx} = 1$
$\frac{d[\sqrt{x}]}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{d[\frac{1}{x}]}{dx} = \frac{-1}{x^2}$

2. හොඳ $\frac{d}{dx}[7x^5+8x^4-9x^2+1]$

$= 7\frac{d[x^5]}{dx} + 8\frac{d[x^4]}{dx} - 9\frac{d[x^2]}{dx} + \frac{d[1]}{dx}$

$= 7.5.x^4 + 8.4.x^3 - 9.2.x + 0$

$= 35x^4 + 32x^3 - 18x$ //

2. හොඳ $y = 8x^5 - 6x^3 + 12x^2 + 4x + 5\sqrt{x}$

$\frac{dy}{dx} = 8.5.x^4 - 6.3x^2 + 12.2.x + 4.1.x^0 + 5.\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 40x^4 - 18x^2 + 24x + 4 + \frac{5}{2\sqrt{x}}$ //

2. හොඳ $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$\frac{dy}{dx} = a.4.x^3 + b.3.x^2 + c.2x^1 + d.1 + 0$

$= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ //

~~ඉහත සූත්‍රයන්ගෙන් ප්‍රයෝජන~~
~~ගැනීමට හැකි වූ~~

$\frac{d[\sin x]}{dx} = \cos x$
$\frac{d[\cos x]}{dx} = -\sin x$
$\frac{d[\tan x]}{dx} = \sec^2 x$
$\frac{d[\cot x]}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$
$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \cot x$

2. ද්‍රව්‍ය ① $\frac{dy}{dx}$ ගණනය කරන්න.

(i) $\frac{d}{dx}[8\sin x + 9x^3]$

$= 8.\frac{d[\sin x]}{dx} + 9.3.x^2$

$= 8\cos x + 27x^2$ //

(ii) $\frac{d}{dx}[3\sin x + 8x^2 - 7x + 6\sqrt{x} + 5]$

$\frac{dy}{dx} = 3.\cos x + 8.2x^1 - 7.1 + \frac{6.1}{2\sqrt{x}} + 0$

$= 3\cos x + 16x^1 - 7 + \frac{3}{\sqrt{x}}$ //

(iii) $y = 7\tan x - 5\cot x + 4\sqrt{x} + 5x$

$\frac{dy}{dx} = 7.\sec^2 x - 5.(-\operatorname{cosec}^2 x) + \frac{2}{\sqrt{x}} + 5 + 0$

$= 7\sec^2 x + 5\operatorname{cosec}^2 x + \frac{2}{\sqrt{x}} + 5$ //

ඝාතීය ශ්‍රිතයේ අවකලන සූත්‍රය

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

උදා: $y = 7e^x - 5\cos x - 7\operatorname{cosec} x + 4x$

$$\frac{dy}{dx} = 7e^x + 5\sin x + 7\operatorname{cosec} x \cot x + 4$$

~~ස්වාභාවික~~ ලඝුගණක ශ්‍රිතයේ අවකලන සූත්‍රය

$\frac{d}{dx}[\log_e x] = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$

උදා: $y = 4\ln x + 7e^x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{1}{x} + 7e^x + 0$$

$$= \frac{4}{x} + 7e^x$$

උදා: $y = 3\sin x - 9\ln x$

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos x - \frac{9}{x}$$

* ස්වභාවික නොවන පාදක ලඝුගණක ශ්‍රිතයක් අවකලනය කිරීමට අවශ්‍ය නම්, පාදය $[\log_e (\ln)]$ වලට හරවා ගෙන අවකලනය කරන්න

උදා: $y = \log_{10} x$

$$y = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left[\frac{\ln x}{\ln 10}\right]}{dx}$$ → නියතයක් නිසා එලියට ගන්න

$$= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x}$$

ගුණිතයක අවකලනය

u හා v යනු x වල ශ්‍රිතයක් නම්,

$$\frac{d}{dx}[u.v] = u\frac{d[v]}{dx} + v\frac{d[u]}{dx}$$

① $\frac{d}{dx}[x^7 . \ln x]$

$$= x^7 . \frac{1}{x} + \ln x . 7 . x^6$$

$$= x^6 + 7x^6 \ln x$$

② $y = (ax^2+bx+c)(px^3+qx^2+R)$

$$\frac{dy}{dx} = (ax^2+bx+c)(3px^2+2qx+0) + (px^3+qx^2+R)(2ax+b \times 1+0)$$

$$= (ax^2+bx+c)(3px^2+2qx) + (px^3+qx^2+R)(2ax+b)$$

③ $y = (3\operatorname{cosec} x + 4\cot x)(e^x + \ln x)$

$$\frac{dy}{dx} = (3\operatorname{cosec} x + 4\cot x)\left(e^x + \frac{1}{x}\right) + (e^x + \ln x)(-3\operatorname{cosec} x \cot x - 4\operatorname{cosec}^2 x)$$

බෙදීමක අවකලනය
[ලබ්ධියක අවකලනය]

u හා v යනු x වල ශ්‍රිතයක් නම්.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\frac{d[u]}{dx} - u\frac{d[v]}{dx}}{v^2}$$

① $\frac{d}{dx}\left[\frac{\tan x}{x}\right]$

$$= \frac{x\sec^2 x - \tan x \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x}{x} - \frac{\tan x}{x^2}$$

(2) $y = \dfrac{1}{(\sec x - \operatorname{cosec} x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sec x - \operatorname{cosec} x)(\times 0) - 1(\sec x \tan x + \operatorname{cosec} x \cot x)}{(\sec x - \operatorname{cosec} x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sec x \tan x + \operatorname{cosec} x \cot x)}{(\sec x - \operatorname{cosec} x)^2}$$

<u>සම්මත ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල අවකලන සූත්‍ර</u>

$$\frac{d}{dx}[\sin^{-1}x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\cos^{-1}x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tan^{-1}x] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\cot^{-1}x] = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec^{-1}x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec}^{-1}x] = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(1) $y = (2\tan^{-1}x - 7\cot^{-1}x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + 7 \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{9}{1+x^2}$$

(5) $y = \dfrac{(x^3+x^2+1)}{\sin^{-1}x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^{-1}x(3x^2+2x) - (x^3+x^2+1)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\sin^{-1}x)^2}$$

(3) $y = \dfrac{\tan^{-1}x}{e^x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \tan^{-1}x \cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \tan^{-1}x}{e^x}$$

(4) $y = \dfrac{x^7}{5}$

<u>1 ක්‍රමය</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} \cdot 7 \cdot x^6$$

<u>2 ක්‍රමය</u>

$$y = \frac{5 \cdot (7 \cdot x^6) - x^7 \times 0}{25}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 7 \cdot x^6$$

සංයුක්ත ශ්‍රිතයක x අනුව x වල වෙනත් ශ්‍රිතයක් ඇසුරෙන් අවකලනය කිරීම

* සෑම සංයුක්ත ශ්‍රිතයක්ම x අනුව වෙනත් ශ්‍රිතයක් ඇසුරෙන්. එය X ලෙස සලකා අවකලනය කර, X ලෙස ගත්තු ශ්‍රිතයේ අවකලනයෙන් ගුණ කරන්න.

① $y = (x^3+x^2+1)^{10}$

$\frac{dy}{dx} = 10.(x^3+x^2+1)^9.(3x^2+2x)$ //

② $y = \sec^5 x$

$y = (\sec x)^5$

$\frac{dy}{dx} = 5(\sec x)^4.\sec x\tan x.$

$= 5\sec^5 x\tan x$

③ $\frac{d}{dx}[\sqrt{x^5+x^3}]$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^5+x^3}}.(5.x^4+3.x^2)$

④ $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

⑤ $\frac{d}{dx}[e^{\tan x}]$

$= e^{\tan x}.\sec^2 x$ //

⑥ $\frac{dy}{dx} = e^{\sin^{-1}x}$

$= e^{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ //

⑦ $y = \ln(\sin x+\cos x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\sin x+\cos x)}.(\cos x - \sin x)$ //

⑧ $y = \sin(2\sin^{-1}x)$

$\frac{dy}{dx} = \cos(2\sin^{-1}x).2.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ //

⑨ $y = \sin(\ln x)$

$\frac{dy}{dx} = \cos(\ln x).\frac{1}{x}$ //

⑩ $y = \sin^{-1}(\cos x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(\cos x)^2}}.(-\sin x)$

$= \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = -1$ //

⑪ $y = \cos^{-1}(x^5)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^{10}}}.5.x^4$ //

⑫ $y = \tan^{-1}(5x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+25x^2}.5$ //

* මෙවැනි අවකලනයන් පහසු කිරීමේ ක්‍රමවලට කීප වතාවක් ද කල හැක

① $y = e^{\sin 5x}$

$\frac{dy}{dx} = e^{\sin 5x}.\frac{d}{dx}[\sin 5x]$

$= e^{\sin 5x}[[\cos 5x].5]$ //

② $y = e^{\tan 3x}$

$\frac{dy}{dx} = e^{\tan 3x}\left[\frac{d}{dx}[\tan 3x]\right]$

$= e^{\tan 3x}[\sec^2(3x).3]$ //

③ $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[\frac{d}{dx}[\ +\sqrt{x+\sqrt{x}}]\right]$

$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{\ }}\right.$

③ $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[\frac{d[x+\sqrt{x+\sqrt{x}}]}{dy}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{d[\sqrt{x+\sqrt{x}}]}{dy}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[\frac{d[x+\sqrt{x}]}{dy}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[1+\frac{d[\sqrt{x}]}{dy}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]\right]$$

④ $y = \frac{\sin 5x}{e^{3x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{3x}\cdot\frac{d[\sin 5x]}{dx} - \sin 5x\,\frac{d[e^{3x}]}{dx}}{(e^{3x})^2}$$

$$= \frac{e^{3x}\cdot[\cos 5x\cdot 5] - \sin 5x[e^{3x}\cdot 3]}{(e^{3x})^2}$$

$$= \frac{\cos 5x\cdot 5 - \sin 5x\cdot 3}{e^{3x}}$$

a^x ආකාරයේ ශ්‍රිතවල අවකලනය

මෙහිදී $a^x = e^t$ ලෙස ගෙන දෙපසටම ln යොදා සාමාන්‍ය ක්‍රමයෙන් අවකලනය කරයි.

① $y = a^x$

$a^x = e^t$

$\ln a^x = \ln e^t$

$x \ln a = t \underbrace{\ln e}_{=1}$

$x \ln a = t$

$a^x = e^{x\ln a}$

$y = e^{x \ln a}$

$\frac{dy}{dx} = e^{x\ln a} \cdot \left[\frac{d}{dx}(x \ln a)\right]$

$= e^{x \ln a} \cdot \ln a \cdot 1$ (නියතයකි)

$= e^{x \ln a} \cdot \ln a$ //

② $y = 4^{3x}$

$4^{3x} = e^t$

$3x \ln 4 = t \ln e$

$4^{3x} = e^{3x\ln 4}$

$y = e^{3x \ln 4}$

$\frac{dy}{dx} = e^{3x\ln 4} \cdot 3\ln 4$ //

ශ්‍රිතයක ශ්‍රිතයක අවකලනය

y යනු u වල ශ්‍රිතයක්ද, u යනු x වල ශ්‍රිතයක්ද වේනම්,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

පරස්පර සම්බන්ධතාවය

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

* $\frac{dy}{dx}$ අපහසුවන විට මෙම සම්බන්ධතාවයෙන් සොයයි.

මෙය භාවිතයේදී පහත 3 ආකාරයට යොදාගනී.

① x ශ්‍රිතයක්, y ඇසුරෙන් ඇති විට $\frac{dy}{dx}$ සෙවීමට අපහසුනම්, පළමුව $\frac{dx}{dy}$ සොයා පරස්පර සම්බන්ධතාවයෙන් $\frac{dy}{dx}$ සොයයි.

① $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

I) $x = \sin y + \tan y + e^y$

$\frac{dx}{dy} = \cos y + \sec^2 y + e^y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y + \sec^2 y + e^y}$ //

II) $x = \ln y - \cos y + 5$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1/y + \sin y}$ //

② සම්මත ලඝුගණක ශ්‍රිතයේ අවකලනය සූත්‍රය සාධනය කිරීමට ද මෙම පරස්පර සම්බන්ධතාවය යොදාගනී.

$\frac{d}{dx}[\underbrace{\log_e x}_{=y}] = \frac{1}{x}$ සාධනය

$\log_e x = y$

$e^y = x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ මගින්,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ //

③ සම්මත ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතවල අවකලන සූත්‍ර සාධනය කිරීමේදී, පරස්පර සම්බන්ධතාවය යොදාගනී.

$\frac{d}{dx}[\underbrace{\sin^{-1} x}_{=y}] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ සාධනය

$\sin y = x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$= \frac{1}{\cos y}$

$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{d}{dx}[\underbrace{\tan^{-1}(x)}_{=y}] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\tan y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad (1+\tan^2 y) = \sec^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(\tan y)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

ශ්‍රිතයක්, තවත් ශ්‍රිතයක් විෂයෙන් අවකලනය කිරීම

① $\cos x$; $\tan x$ විෂයෙන් අවකලනය කිරීම

$$\frac{d[\cos x]}{d[\tan x]} = \frac{d[\cos x]}{dx} \cdot \frac{dx}{d(\tan x)}$$

$$= (-\sin x) \cdot \frac{1}{\frac{d[\tan x]}{dx}}$$

$$= -\sin x \cdot \frac{1}{\sec^2 x}$$

② $\ln y$; x විෂයෙන්

$$\frac{d[\ln y]}{dx} = \frac{d[\ln y]}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

③ $\sin\theta$, x විෂයෙන්

$$\frac{d[\sin\theta]}{dx} = \frac{d[\sin\theta]}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

අව්‍යක්ත ශ්‍රිත අවකලනය

x හා y වෙන්කිරීම අපහසු ශ්‍රිතයන් සම්බන්ධ සමීකරණ මේවාය.
එවිට විචල්‍යයන් දෙක අන්තර්ගත වූ දෙපසම ඇත.
දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය කර $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ වෙන්කරගනී

① $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

① $x^5 + e^x = y^7 + \sin y$

දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය

$$5 \cdot x^4 + e^x = (7 \cdot y^6 + \cos y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x^4 + e^x)}{(7y^6 + \cos y)}$$

② $x^3 + \cos y + e^x + \tan^{-1} y = 7$

විචල්‍ය වෙන්කරන්න.

$$x^3 + e^x = 7 - \cos y - \tan^{-1} y$$

දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය

$$3x^2 + e^x = \left(0 + \sin y - \frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + e^x}{\left(\sin y - \frac{1}{1+y^2}\right)}$$

පරාමිතික ආකාරයෙන් අවකලනය

මෙහිදී x හා y විචල්‍යයන් දෙකම t, θ වැනි වෙනත් විචල්‍යයක් ඇසුරෙන් ලියා, $\frac{dy}{dx}$ සොයයි.

① $x = \sin t + \cos t$
$y = \tan t + e^t$ (පරාමිතිකව)

$\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

* තනි තනිව අදාළ විෂයෙන් අවකලනය කරන්න

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t + e^t$$

* දැන් $\frac{dy}{dx}$ දාම ලෙස භාවිතා කරන්න

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{(\sec^2 t + e^t)}{(\cos t - \sin t)}$$

ලඝු ගණකාංක ශ්‍රිත අවකලන ක්‍රම.

(01) ශ්‍රිතයන් රැසක් ගුණිත වශයෙන් ඇති වෙලාවල දී පළමුව දෙපසටම ln ගෙන ලඝු න්‍යාය, ලඝු නීති, ඉන්පසු අවකලනය කිරීම පහසු වේ

(02) බලයට ~~[illegible]~~ විචල්‍යයන් ඇති වෙලාවලදී අවකලනය කරන විට

01 ශ්‍රිත රැසක් ගුණිත වශයෙන් ඇති වෙලාවල දී - +ශ්‍රිතයේ ගොඩක් ගුණිත ද 20 වගේ ඇතිවිට.

පියවර:-
- දෙපසට ln ගනිමු.
- පසුව දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය කරමු

① $y = (x^2+1)^3 \sin^5 x (5x+1)^7$

$\frac{dy}{dx}$ සොයන්න

දෙපසටම ln ගනිමු.

$\ln y = \ln\left[(x^2+1)^3 \sin^5 x (5x+1)^7\right]$

$\times \rightarrow (+)$
$\wedge \rightarrow \times$
$\div \rightarrow (-)$ } ලඝු නීති

$\ln y = 3\ln(x^2+1) + 5\ln \sin x + 7\ln(5x+1)$

දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය කරමු.

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{3\times 1}{(x^2+1)} \times (2x) + \frac{5\times 1\times \cos x}{(\sin x)} + \frac{7\times 1}{(5x+1)} \times 5$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{6x}{(x^2+1)} + \frac{5\cos x}{(\sin x)} + \frac{35}{(5x+1)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{6x}{(x^2+1)} + 5\cot x + \frac{35}{(5x+1)}\right]$$

② $y = \dfrac{(x^4+1)^8 (3x+1)^5}{(x^2+4)^3 \tan 7x}$

$\frac{dy}{dx}$ සොයන්න

දෙපසටම ln ගනිමු.

$$\ln y = \ln\left(\frac{(x^4+1)^8 (3x+1)^5}{(x^2+4)^3 (\tan 7x)}\right)$$

$$\ln y = \left(8\ln(x^4+1) + 5\ln(3x+1)\right) - \left(3\ln(x^2+4) + 7\ln \tan x\right)$$

$$\ln y = 8\ln(x^4+1) + 5\ln(3x+1) - 3\ln(x^2+4) - 7\ln \tan x$$

දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය කරමු.

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 8\cdot\frac{1}{(x^4+1)}\cdot 4x^3 + 5\cdot\frac{1}{(3x+1)}\cdot 3 - 3\cdot\frac{1}{(x^2+4)}\cdot 2x - 7\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot \sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{32x^3}{(x^4+1)} + \frac{15}{(3x+1)} - \frac{6x}{(x^2+4)} - \frac{7\sec^2 x}{\tan x}\right]$$

02 ලඝුගණක ශ්‍රිතවලින් අවකලනය.

පියවර :-
- දෙපසටම ln යොදමු
- නැවත දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය කරමු.

① $y = x^{\sin x}$. $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න

දෙපසටම ln යොදමු.

$\ln y = \sin x . \ln x$

දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය

~~$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = \cos x \frac{1}{x}$~~

~~$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cos x$~~

ගුණිතයක අවකලනය

$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = \sin x . \frac{1}{x} + \ln x . \cos x$

$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x \right]$

② $y = x^x$

දෙපසටම ln යොදමු.

$\ln y = x(\ln x)$ → නියතයක් නොවේ x වල පදයක් ∴ ගුණිතයක අවකලනය

දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය

$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = x . \frac{1}{x} + \ln x . 1$

$\frac{dy}{dx} = y [1 + \ln x]$

③ $y = 5^x$

දෙපසටම ln යොදමු.

$\ln y = x \ln 5$

දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය

$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = \frac{d(x \ln 5)}{dx}$ → නියතයක් ∴ ගුණිතයක අවකලනය අවශ්‍ය නැත.

$\frac{dy}{dx} = y \ln 5$ //

$= 5^x$

$\frac{dy}{dx} = 5^x \ln 5.$

දෙකම එකයි

④ $y = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^x$

දෙපසටම ln යොදමු

$\ln y = x \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)$

$\ln y = x \left[\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1) \right]$

දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය.

$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = x \left[\frac{1}{(x^2+1)} . 2x - \frac{1}{(x^2-1)} . 2x \right] + \left[\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1) \right] . 1$

$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{2x^2}{(x^2+1)} - \frac{2x^2}{(x^2-1)} + \ln(x^2+1) - \ln(x^2-1) \right]$

$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{2x^2}{(x^2+1)} - \frac{2x^2}{(x^2-1)} + \ln \left(\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)} \right) \right]$

(II) $y = x^9 + \sin x + x$

$$\frac{dy}{dx} = 9.x^8 + \cos x + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 72.x^7 - \sin x$$

(2) $x = \sin t$, $y = t^5 + t^3$

(t පරාමිතිය)

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ සොයන්න

$$\frac{dx}{dt} = \cos t . \frac{dt}{dx} \quad \Big| \quad \frac{dy}{dt} = 5t^4 + 3t^2$$

[illegible]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5t^4 + 3t^2}{\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos t.(20t^3 + 6t] - (5t^4 + 3t^2)(-\sin t)}{(\cos t)^2} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos t\,[20t^3 + 6t) + (5t^4 + 3t^2)(\sin t)}{(\cos t)^3}$$

අංකනය :

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad \Big| \quad \frac{d[f(x)]}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' \quad \Big| \quad \frac{d^2[f(x)]}{dx^2} = f''(x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ නම්

$f'(x)$, $f''(x)$ සොයන්න

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

දෙවන හා ඉහළ ගණයේ ව්‍යුත්පන්න

[illegible] :

[illegible]

y , x ට අනුව [illegible]

(1) $y = x^5 + x^4 + 2$ නම්

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=1}$ සොයන්න

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 4x^3$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 5 + 4 = 9$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 20x^3 + 12x^2$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1} = 20 + 12 = 32$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 60x^2 + 24x$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=1} = 60 + 24 = 84$$

② $x^3+y^3=9$ නම්

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)}$ සොයන්න.

(x, y)

$x^3 = 9 - y^3$

දෙපසම x විෂයෙන් අවකලනය

$3x^2 = -3y^2 \times \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 3x^3 / -3y^2$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = 3\times 1^3 / -3\times 2^2$

$= 3/-12$

$= -\frac{3}{12}$

$= -\frac{1}{4}$ //

③ $y = e^{\sin x}$ නම්,

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ සොයන්න

$y = e^{\sin x}$

$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} . \cos x$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = e^0 . \cos 0$

$= 1 . 1$

$= 1$ //

④ $x = 5\sin\theta + \cos\theta$

$y = \theta^3$

(θ - පරාමිතිය)

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\pi/4}$ සොයන්න

~~$\cos\theta = x - 5\sin x$~~

~~$(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dx} = 1 + 5\cos x$~~

~~$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1+5\cos x}{-\sin\theta}$ — ①~~

$\frac{dy}{dx} = 3\theta^2 . \frac{d\theta}{dx}$

~~$\frac{dy}{dx} = 3\theta^2$~~

$1 = (5\cos\theta - \sin\theta) . \frac{d\theta}{dx}$

$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{5\cos\theta - \sin\theta}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3\theta^2}{5\cos\theta - \sin\theta}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\pi/4} = \frac{\frac{3\pi^2}{16}}{5\frac{1}{\sqrt2} - \frac{1}{\sqrt2}}$

$= \frac{3\sqrt2\pi^2}{16\times 4}$

$= \frac{3\sqrt2\pi^2}{64}$

$= \frac{3\pi^2}{32\sqrt2}$ //

අනන්ත ශ්‍රේණි අවකලනය

Note:

$\infty + 1 \to \infty$

$\infty - 1 \to \infty$

$\infty = y$ නම්

$y - 1 \to y$

$y + 1 \to y$

එනිසා y හි [illegible] අගය [illegible] අවකලනය කරන්න

① $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}}$ (ඇතුළත කොටස $= y$)

$y = \sqrt{x+y}$

$y^2 = x + y$

$y^2 - y = x$

දෙපසම x ගෙන් අවකලනය

$(2y-1).\frac{dy}{dx} = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2y-1)}$ //

සැ.යු. අවකලනයේ පැවරුම්වල දී [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] අවකලනය කරනු

③ $y = x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \dots}}}}$ $= y$

$y = x + \frac{1}{y}$

~~y~~ $= \frac{1}{y} = x$

~~$\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx} = 1$~~

~~$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{y^2}$~~

$\frac{y^2-1}{y} = x$

$y^2 - 1 = xy$. [illegible]

$(2y)\frac{dy}{dx} = x \cdot 1 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 1$

$\frac{dy}{dx}(2y - x) = y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(2y-x)}$ //

④ $y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}}$ $= y$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)$ සොයන්න

$y = x^{y}$

~~$1 \cdot \frac{dy}{dx} = y \cdot x^{(y-1)}$~~

දෙපසම ln ගැනීමෙන්

$\ln y = y \ln x$

දෙපසම අවකලනය

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \cdot \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - \ln x\right) = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{y} - \ln x\right)}$ //

[illegible]
[illegible]
[illegible]

① m නියතයක් වේ

$y = e^{m\tan^{-1}x^2}$ නම්;

I) $(1+x^4)\frac{dy}{dx} = 2mxy$ බවද

II) $(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(2x^2-m)\frac{dy}{dx} - 2my = 0$ බවද පෙන්වන්න

I) * $\frac{dy}{dx}$ [illegible]
y, x [illegible] අවකලනය

$\frac{dy}{dx} = e^{m\tan^{-1}x^2} \cdot m \cdot \frac{1}{1+x^4}\cdot 2x$

* y [illegible]

$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{m}{1+x^4}\cdot 2x$

$(1+x^4)\frac{dy}{dx} = 2mxy$ //

II) * $\frac{d^2y}{dx^2}$ [illegible]

I) $\frac{dy}{dx}$ අවකලනය

~~$\frac{d^2y}{dx^2} \times (4x^2)$~~ $= 2m\left[x\cdot\frac{dy}{dx} + y \cdot 1\right]$

* [illegible] අවකලනය

$(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot 4x^3 = 2m\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$

$(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(2x^2-m)\frac{dy}{dx} - 2my = 0$ //

② a - නියතයක් වේ

$x > a$ වේ

$y = [\ln(x-a)]^2$ නම්;

$(x-a)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x-a)\frac{dy}{dx} = 2$ බව

පෙන්වන්න

* මුලින්ම ප්‍රථම අවකලනය සොයන්න සොයන්න

$$\frac{dy}{dx} = 2\,[\ln(x-a)] \cdot \frac{1}{(x-a)} \cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(\ln(x-a)) \cdot \frac{1}{(x-a)}$$

* y ලැබෙන ලෙස සකස් කරන්න

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4\,\underbrace{(\ln(x-a))^2}_{y} \cdot \frac{1}{(x-a)^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y\,\frac{1}{(x-a)^2}$$

$$(x-a)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$$

* නැවත් $\frac{d^2y}{dx^2}$ සොයා ගැනීමට දෙවන අවකලනය සොයන්න.

$$(x-a)^2 \cdot 2\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 4\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot 2(x-a) \cdot 1$$

$$(x-a)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x-a)\frac{dy}{dx} = 2 \quad //$$

③ $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ නම්,

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 1 = 0$

පෙන්වන්න

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (\sin^{-1}x)^2 \cdot \frac{1}{(1-x^2)}$$

* භාගය තිබෙනවා නම් හරයෙන් ගුණ කරලා ලියන්න

$$(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2y$$

$$(1-x^2) \cdot 2\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot (-2x) = 2\frac{dy}{dx}$$

* පොදු පද කපා හරින්න.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 1 = 0 \quad //$$

ගැටලු විසඳීමේදී සැලකිය යුතුයි.

පියවර * අදාළ ශ්‍රිතයේ ප්‍රථම අවකලන සංගුණකය ලබා ගන්න ගත් විට පළමු අවකලනය සොයන්න

* පළමු අවකලන සංගුණකය සොයාගත් විට ශ්‍රිතයේ ඇති පද කොටස.
y ආදේශ කරන්න, y ලැබෙන ලෙස සකස් කරන්න.

* පසුව දෙවන අවකලන සංගුණකය සොයන්න.

* හරයේ ඇති පද ගුණ කර සුළු කරන්න

* පොදු පද කපා හරින්න, ශ්‍රිතය සමාන කරන්න

① $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ නම්

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 1 = 0$

බව පෙන්වන්න

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 2\sin^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (\sin^{-1}x)^2 \cdot \frac{1}{(1-x^2)}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2y \cdot \frac{1}{(1-x^2)}$

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 2y \cdot \frac{-1}{(1-x^2)}(2x) + \frac{1}{(1-x^2)} \cdot 2\frac{dy}{dx}$

$(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2y$

$(1-x^2) \cdot 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot (-2x) = 2\frac{dy}{dx}$

$2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)x - 1 = 0$

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 1 = 0$

② $y = e^{2x}\sin 2x$ නම්,

$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ බව පෙන්වන්න.

1 ක්‍රමය

$y = e^{2x}\sin 2x$

$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot \cos 2x + \sin 2x\, e^{2x} \cdot 2$

$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot \cos 2x + 2y$

$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 + \cos 2x\, e^{2x} \cdot 2 + 2\frac{dy}{dx}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -y + \left(\frac{dy}{dx} - 2y\right)2 + 2\frac{dy}{dx}$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

2 ක්‍රමය ⟶

③ $y = \tan^{-1}(x^2)$ නම්,

$(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x^3\frac{dy}{dx} - 2 = 0$

බව පෙන්වන්න

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x$

$(1+x^4)\frac{dy}{dx} = 2x$

$(1+x^4) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot 4x^3 = 2$

$(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x^3\frac{dy}{dx} - 2 = 0$

④ $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ නම්,

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$

බව පෙන්වන්න

$\frac{dy}{dx} = \cos(m\sin^{-1}x) \cdot m \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \sin(\ )$ ට, සම්බන්ධ $\cos(\ )$ යුගල, $\therefore$ මෙය ත්‍රිකෝණමිතික අනන්‍යතා $\sin^2(\ ) + \cos^2(\ ) = 1$ ආකාරයේ වේ.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \cos^2(m\sin^{-1}x) \cdot m^2 \cdot \frac{1}{(1-x^2)}$

$y^2 + \cos^2(m\sin^{-1}x) = 1$

$\cos^2(m\sin^{-1}x) = (1-y^2)$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1-y^2)\frac{m^2}{(1-x^2)}$

[illegible]

$$(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1-y^2)m^2$$

$$\frac{dy}{dx}.(1-x^2).2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.(-2x) = m^2\left(-2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$$

⑤ $y = \frac{\cos 2x}{x}$ නම්, $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4xy = 0$ බව පෙන්වන්න

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x.(-\sin 2x).2 - \cos 2x.1}{x^2}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} = -2x\sin 2x - \cos 2x$$

$$yx = \cos 2x$$

$$x^2\frac{dy}{dx} = -2x\sin 2x - yx$$

$$x\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x - y$$

$$x.\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.1 = -2.\cos 2x.2 - \frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4xy = 0$$

[illegible] $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^3y}{dy^3}\right)_{x=0}$

· [illegible]

පියවර : දී ඇති සමීකරණය [illegible] වරක් [illegible]

[illegible] $x=0$ [illegible].

[illegible] $(y)_{x=0}$

සිට ↓ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$

[illegible]

① $y = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$ නම්

$$\frac{dy}{dx} + y = 2e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x)$$

බව පෙන්වන්න. $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$

වන පරිදි p හා q නියතයන් [illegible] $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ [illegible]

$$y = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}.[(-\sin 2x).2 + \cos 2x.2] + \underbrace{(\cos 2x + \sin 2x).e^{-x}}_{y}.(-1)$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 2e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x) \quad —①$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2\left[e^{-x}.[-\sin 2x.2 - \cos 2x.2] + (\cos 2x - \sin 2x).e^{-x}.(-1)\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2\left[-2e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x) - e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x)\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2\left[-2y - \underbrace{e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x)}_{①}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2\left[-2y - \frac{dy}{dx}\times\frac{1}{2} - \frac{y}{2}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -4y - \frac{dy}{dx} - y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

$p = 2$, $q = 3$

$(y)_{x=0} = e^0(\cos 0 + \sin 0)$

$= 1(1+0)$

$= 1$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 2e^0(\cos 0 - \sin 0) - (y)_{x=0}$

$= 2\times1(1-0) - 1$

$= 2-1$

$= 1$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -5(y)_{x=0} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$

$= -5\times1 - 2\times1$

$= -7$

$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = 0$

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = -5\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$

$= -5.1 - 2.(-7)$

$= -5 + 14$

$= 9$

→ 2 ක්‍රමය

Note:

+ අවකලන සමීකරණ ආශ්‍රිත සම්බන්ධයෙන් ඔප්පු කිරීමට ඇති ගැටලුවලදී එක් එක් අවකලන සංගුණක වෙන වෙනම සොයා ඔප්පු කළයුතු ප්‍රකාශයේ එක් එක් පදයට ආදේශ කර එම සමීකරණය තෘප්ත කරනවා ද බැලිය හැක. (දිග ක්‍රමය)

② $y = e^{2x}\sin x$ නම්

$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ බව පෙන්වන්න

$y = e^{2x}\sin x$

$\frac{dy}{dx} = e^{2x}.2\sin x + e^{2x}.\cos x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\left[\sin x\, e^{2x}.2 + e^{2x}\cos x\right]$ 4

$+ e^{2x}.(-\sin x) + \cos x\, e^{2x}\, 2$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^{2x}\sin x + 2\cos x\, e^{2x} + 4\sin x\, e^{2x} + 2e^{2x}\cos x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -y + 2\cos x\, e^{2x} + 4y + 2\cos x\, e^{2x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 3y + 4\cos x\, e^{2x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 3y + 4\cdot\frac{dy}{dx} - 8y$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4dy}{dx} - 5y$

$LHS = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{4dy}{dx} + 5y$

$= \frac{4dy}{dx} - 5y - \frac{4dy}{dx} + 5y$

$= 0$

$= LHS = RHS$ වේ

Note:

පරාමිතීන් ඇසුරෙන් ගැටලුවලදී අවකලන සංගුණකයක් සම්බන්ධතා ඔප්පු කිරීමට ඇත්නම්, $\frac{dy}{dx}$ සොයා y ආකාරයෙන් හෝ, නැත x ආකාරයෙන් හෝ ද ඇත්නම්, එවිට ආදේශ කර සුළුකිරීම වඩා පහසුවේ

① y යනු u ශ්‍රිතයක් ද, u යනු x හි ශ්‍රිතයක් ද නම්.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$

බව පෙන්වන්න

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

ඉහත x විෂයෙන් අවකලනයෙන්

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{d\left[\frac{du}{dx}\right]}{dx} + \frac{du}{dx}\,\frac{d\left[\frac{dy}{du}\right]}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx}\cdot\frac{d\left[\frac{dy}{du}\right]}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{du^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

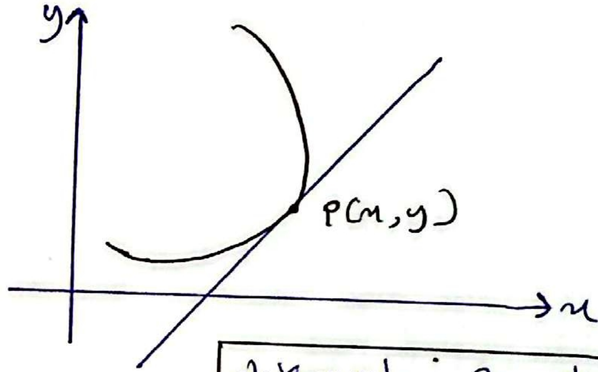
අවකලනයේ යෙදීම්

අවකලනයේ යෙදීම්

- ① වක්‍ර ආශ්‍රිත ගැටළු **
  - i) y අක්ෂය ඇසුරින් ආශ්‍රිත ගැටලු
  - ii) ස්පර්ශක, අභිලම්බ ගැටළු
- ② උපරිම, හා අවම ආශ්‍රිත ගැටළු **
- ③ සීඝ්‍රතා ආශ්‍රිත ගැටලු
- ④ අසමානතා ආශ්‍රිත ගැටළු (වැඩිවන ශ්‍රිත, අඩුවන ශ්‍රිත)

① වක්‍ර ආශ්‍රිත ගැටළු

$\frac{dy}{dx}$ වල ජ්‍යාමිතික අදහස



ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= \frac{dy}{dx}$

යම් ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය = එම ලක්ෂ්‍යයේ දී ~~ස්පර්ශකයේ~~ වක්‍රයේ අනුක්‍රමණය

වක්‍රයේ අනුක්‍රමණය $= \frac{dy}{dx}$

① පහත දෙන වක්‍රවල දෙන ලද ලක්ෂ්‍ය වලදී ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය සොයන්න

(I) $y = x^5 + x^4 + x^3$ වක්‍රයට (1, 3) දී

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

ස්ප. අනුක්‍රමණය $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,3)}$

$= 5.1^5 + 4.1^4 + 3.1^2$

$= 12$

(II) $y = \frac{x}{x^2+1}$ වක්‍රයට $(1, \frac{1}{2})$ දී

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)\frac{d(x)}{dx} - x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1) - x.2x}{(x^2+1)^2}$$

ස්ප. අනු $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\frac{1}{2})}$

$= \frac{2-2}{4}$

$= 0$

(III) $y^2 = x^3$ වක්‍රයට (4, -8) දී

$$2y.\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

ස්ප. අනු $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,-8)}$

$= \frac{3.16}{2.-8} = -3$

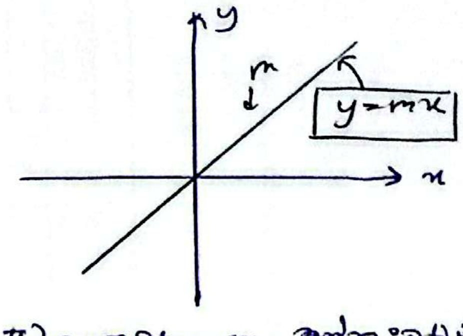
Notes

ඛණ්ඩාංක ජ්‍යාමිතියේ සරල රේඛාව

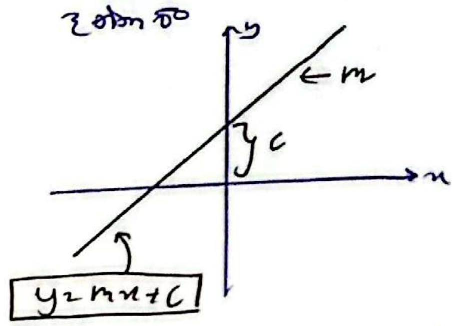
අදාළ සූත්‍ර

I. සරල රේඛාවක සමීකරණ ලිවීම

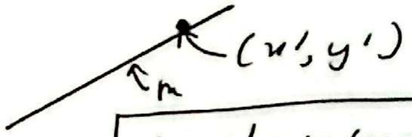
I) අනුක්‍රමණය දී ඇති විට මූලලක්ෂ්‍යය හරහා යන රේඛාව



II) අනුක්‍රමණය හා අන්තඃඛණ්ඩය දී ඇති විට

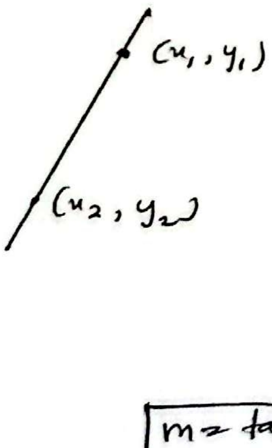


III) සරල රේඛාව මත ලක්ෂ්‍යයක් හා අනුක්‍රමණය දී ඇති විට



$$y - y' = m(x - x')$$

IV) සරල රේඛාව මත ලක්ෂ්‍ය දෙකක් දී ඇති විට.



පියවර

① $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ මගින් අනුක්‍රමණය සොයන්න.

② ඉන්පසු ලක්ෂ්‍යයක් භාවිතා කර $(y - y') = m(x - x')$ සූත්‍රයට ආදේශ කරන්න

$$m = \tan\theta$$

+ රේඛාව සමඟ x අක්ෂයේ ධන දිශාව වාමාවර්තව සාදන කෝණය

(−) m නම් → θ මහා කෝණයකි

(+) m නම් → θ සුළු කෝණයකි

[2] සරල රේඛාවක සාධාරණ සමීකරණය

$$ax + by + c = 0$$

සාමාන්‍යයෙන් සාධාරණ සමීකරණය ලෙස දැක්වේ, අනුක්‍රමණය හා අන්තඃඛණ්ඩය සොයා ගැනීම පහසු වේ

$ax + by + c = 0$

$by = -ax - c$

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ (m, c)

$m = -\frac{a}{b}$

$m = -\frac{x \text{ වල සංගුණකය}}{y \text{ වල සංගුණකය}}$

$c = -\frac{c}{b}$

උදා: පහත සඳහන් රේඛාවල අනුක්‍රමණය හා අන්තඃඛණ්ඩය සොයන්න

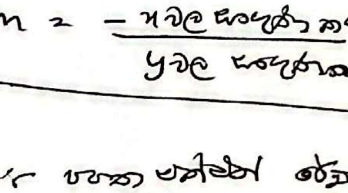
i) $5x - 3y + 11 = 0$

$m = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

$c = \frac{-11}{-3}$, $c = \frac{11}{3}$

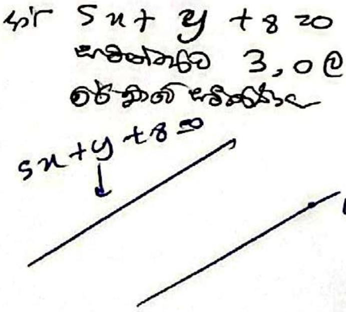
[3] රේඛා දෙකක් සමාන්තර වීමට අවශ්‍යතාවය

* එවිට අනුක්‍රමණ සමාන වේ



$m_1 = m_2$

උදා: $5x + y + 8 = 0$ රේඛාවට සමාන්තරව 3,0 ලක්ෂ්‍යය හරහා යන රේඛාවේ සමීකරණය



$m = \frac{-5}{1}$

$m = -5$

විස:

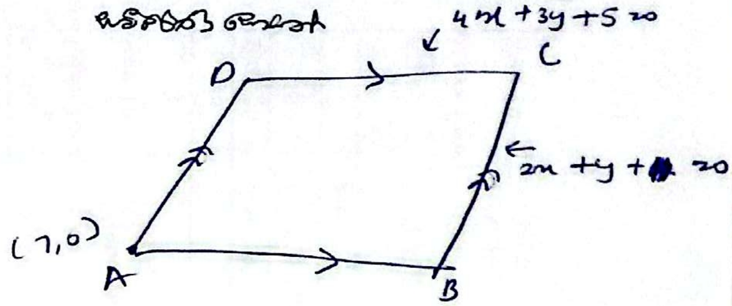
$y - y' = m(x - x')$

$y - 0 = -5(x - 3)$

$y = -5x + 15$

$5x + y - 15 = 0$

උදා: ABCD සමාන්තරාස්‍රයක් වන අතර BC, BC වල සමීකරණ පිළිවෙලින් $4x + 3y + 5 = 0$, $2x + y + 1 = 0$ වේ. $A = (7,0)$ වේ. AB, AD වල සමීකරණ සොයන්න



AB

$m = -\frac{4}{3}$

$y - y' = m(x - x')$

$y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 7)$

$\frac{4}{3}x + y - \frac{28}{3} = 0$

$4x + 3y - 28 = 0$

AD

$m = -2$

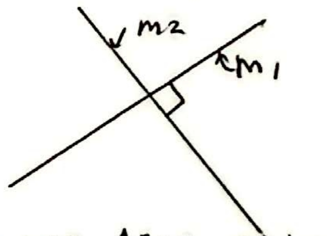
$y - y' = m(x - x')$

$y - 0 = -2(x - 7)$

$2x + y - 14 = 0$

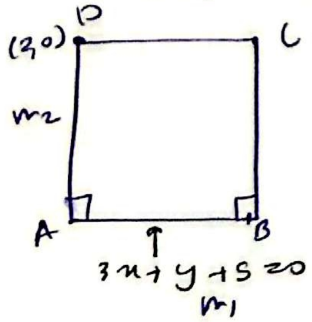
[4] රේඛා දෙකක් ලම්බක වීමට අවශ්‍යතාවය

* අනුක්‍රමණ දෙකේ ගුණිතය = −1 වේ



$m_1 \cdot m_2 = (-1)$

උදා: ABCD සමචතුරස්‍රයක් වේ. $D = (2,0)$ වේ. DC, AD රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න



$m_1 = \frac{-3}{1}$

$m_1 = -3$

DC

$y - y' = m(x - x')$

$y - 0 = -3(x - 2)$

$3x + y - 6 = 0$

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_2 = \frac{1}{3}$

AD

$y - y' = m(x - x')$

$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 2)$

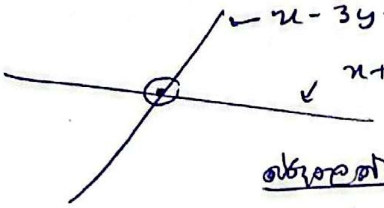
$-x + 3y + 2 = 0$

[5] සරල රේඛාවක සමීකරණය

(ශේෂ)

* රේඛා දෙකක ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයා ගැනීම විසඳුම් සමීකරණ මගින්

උදා: $x+3y-7=0$ හා $x-3y-1=0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන $5x+y+8=0$ රේඛාවට සමාන්තර රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න

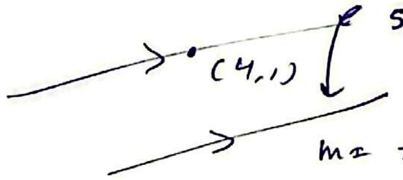


සමීකරණය

$x-3y-1=0$ — ①
$x+3y-7=0$ — ②

① + ②

$2x-8=0$
$x=4$
$y=1$ $\quad (4,1)$



$m=\frac{-5}{1}$

$(y-y')=m(x-x')$
$y-1=-5(x-4)$
$y-1+5x-20=0$
$5x+y-21=0$

[6] යම් ලක්ෂ්‍යයක්, සමීකරණයක් සපුරාලයි නම්, එම ලක්ෂ්‍යය වක්‍රය මත පිහිටයි. එම රේඛාව හෝ වක්‍රයේ සමීකරණය සපුරාලන්නේ

උදා: $(-5,0)$ ලක්ෂ්‍යය $2x+7y+k=0$ මත පිහිටයි නම්, k සොයන්න

$2(-5)+7\times 0+k=0$
$-10+k=0$
$k=10$

(1) II) ස්පර්ශක, අභිලම්බ ආශ්‍රිත ගැටලු

උදා: ① $y^2=x^3$ වක්‍රයට

I) (4, 8) හිදී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

II) එම ස්පර්ශකය $x+y+5=0$ රේඛාව ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය

III) එම ස්පර්ශකය y අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න

I) $y^2=x^3$

$2y\frac{dy}{dx}=3x^2$

ස්.රේ. අනු. $=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,8)}$

$=\frac{3\times 4^2}{2\times 8}$

$=3$

$(y-y')=m(x-x')$
$y-8=3(x-4)$
$y-3x+4=0$

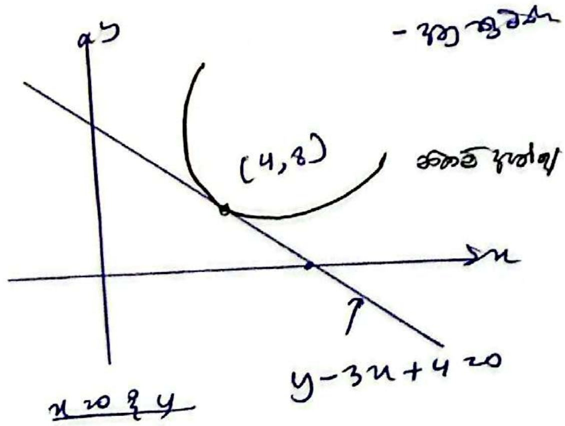
ii) $y-3x+4=0$ — ①
$x+y+5=0$ — ②

① − ②

$-4x-1=0$
$x=-\frac{1}{4}$ $\quad y=-\frac{19}{4}$

$\left(-\frac{1}{4},-\frac{19}{4}\right)$

iii)



$x=0$ දී y
$y=-4$

y අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යය $(0,-4)$

2. සඳහා ② $x = t^3$, $y = t^2$ නම්
(t පරාමිතිය)
(t^3, t^2) ලක්ෂයෙන්දී ස්පර්ශකයේ
සමීකරණය සොයන්න

$x = t^3$ $\quad y = t^2$

$\frac{dx}{dt} = 3t^2$ $\quad \frac{dy}{dt} = 2t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{3t^2}$

ස්. ක්‍රම = $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(t^3, t^2)}$

$= \frac{2}{3t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3t}$

$m = \frac{2}{3t}$

ස්පර්. සමීකරණය

$y - y' = m(x - x')$

$y - t^2 = \frac{2}{3t}(x - t^3)$

$\times 3t$

$-2x + y3t - t^3 = 0$

② $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, $x = \ln(\tan t/2)$

$y = \sin t$

$\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$ බව සාධනය.

$t = \frac{2\pi}{3}$ නම්;

ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= -\frac{\sqrt{3}}{4}$ බව

පෙන්වන්න.

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tan t/2} \cdot \sec^2 t/2 \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sec^2 t/2}{\tan t/2}$

$\frac{dy}{dt} = \cos t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$= \cos t \cdot \frac{2\tan t/2}{\sec^2 t/2}$

$= \cos t \cdot 2\frac{\sin t/2}{\cos t/2} \cos t/2 \cos t/2$

$\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$

$t = \frac{2\pi}{3}$ නම්

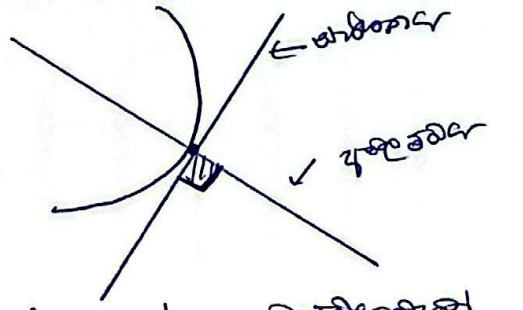
$\frac{dy}{dx} = \cos\frac{2\pi}{3} \sin\frac{2\pi}{3}$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= -\frac{\sqrt{3}}{4}$

අභිලම්බය



ස්පර්ශකය ⊥ අභිලම්බය නම්,

$m_1 m_2 = -1$

m_1 ස්පර්ශක $\times m_2$ අභිලම්බය $= -1$

m අභි $= \frac{-1}{m_1 \text{ස්ප.}}$

m අභිලම්බය $= \frac{-1}{\frac{dy}{dx}}$

① $y = (x-1)^2(x+2)$

වනුයේ කෙ $(0, 2)$ දී

i) ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

ii) අභිලම්බයේ "

iii) අභිලම්බය ඡේදනය කරන අනෙත් ලක්ෂ්‍යය

$y = (x-1)^2(x+2)$

$\frac{dy}{dx} = (x-1)^2 \cdot 1 + (x+2)2 \cdot (x-1) \cdot 1$

$\frac{dy}{dx} = (x-1)[x-1 + 2x+4]$

$= (x-1)[3x+3]$

$\frac{dy}{dx} = 3(x-1)(x+1)$

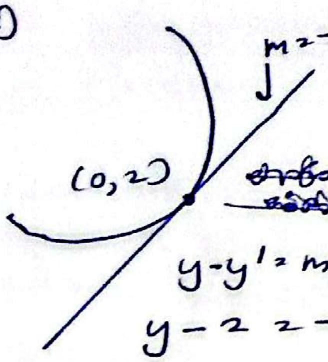
$\frac{dy}{dx} = 3(x^2-1^2)$

i) ස්පර්ශකයේ m $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,2)}$

$= 3(0-1)$

$= -3$

I)



ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$y - y' = m(x - x')$

$y - 2 = -3(x - 0)$

$3x + y - 2 = 0$ //

II) අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,2)}}$

$= \dfrac{-1}{-3}$

$= \dfrac{1}{3}$

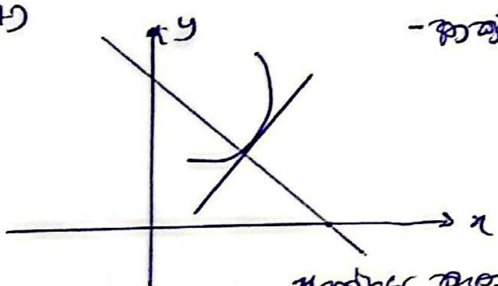
අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය සමීකරණය

$y - y' = m(x - x_1)$

$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 0)$

$-x + 3y - 6 = 0$

III)



- අනුක්‍රමණය

y අක්ෂය ඡේදනය ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

$y = 0$

$x = 6$

$(6, 0)$

x අක්ෂය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

$x = 0$

$y = \frac{6}{3}$

$y = 2$

$(0, 2)$

② $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$

ඒ (t පරාමිතියක්) t ඇසුරින් $\frac{dy}{dx}$ සොයා $t = \ln 2$ වන විට වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය $5x - 3y - 8 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$x = e^t + e^{-t}$

$y = e^t - e^{-t}$

$\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}.-1 \Rightarrow e^t - e^{-t}$

$\frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t}.-1 \Rightarrow e^t + e^{-t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$

$t = \ln 2$

$t = \log_e 2$

$e^t = 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{4+1}{4-1} = \frac{5}{3}$

ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= \frac{5}{3}$

ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

$x = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$y = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

සමීකරණය

$y - y' = m(x - x')$

$y - \frac{3}{2} = \frac{5}{3}(x - \frac{5}{2})$

$6y - 9 = 10(x - \frac{5}{2})$

$6y - 9 = 10x - 25$

$-10x + 6y + 16 = 0$

$-5x + 3y + 8 = 0$

$5x - 3y - 8 = 0$ //

ප්‍රස්තාර ඇඳීම ආශ්‍රිත ගැටලු
(වක්‍ර අනුරේඛනය)

වක්‍රයක පවතින හැකි ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය

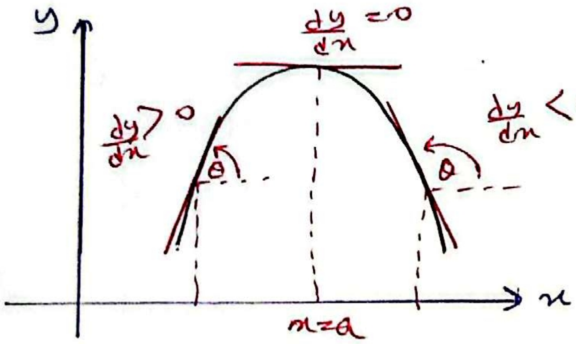
① උපරිම ලක්ෂ්‍ය } ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය /
② අවම ලක්ෂ්‍ය } හැරුම් ලක්ෂ්‍ය.
③ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය

Note:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \text{ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය}$$

$\tan\theta$ => සුළු කෝණයක් => (+) m
$\tan\theta$ => මහා කෝණයක් => (−) m

01 උපරිමය

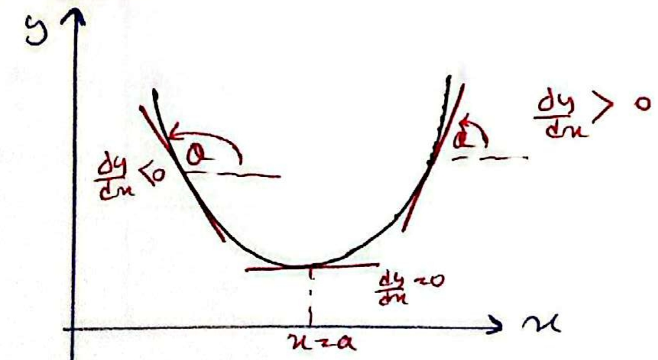


x = a විට ; y ට උපරිමයක් පැවතීමට,

1) x = a විට ; $\frac{dy}{dx} = 0$ ද ;
2) x < a විට ; $\frac{dy}{dx} = (+)$ ද ;
3) x > a විට ; $\frac{dy}{dx} = (-)$ ද ;

විය යුතුය.

02 අවමයක්



x = a විට ; y ට අවමයක් පැවතීමට,

1) x = a විට ; $\frac{dy}{dx} = 0$ ද ;
2) x < a විට ; $\frac{dy}{dx} = (-)$ ද ;
3) x > a විට ; $\frac{dy}{dx} = (+)$ ද ; විය යුතුය

Note:
වක්‍රයක උපරිමයක් හෝ අවමයක් පැවතීමට
(වක්‍රයක හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් පැවතීමට)

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 0}$$ විය යුතුය.

පියවර:

① $\frac{dy}{dx} = 0$ වන x අගයන් සොයා ගන්න.
② එම අගයට දෙපැත්තෙන් x අගයන් දී $\frac{dy}{dx}$ හි ලකුණු බලන්න.
③ ප්‍රස්තාරයේ m දළ ව ඇඳ උපරිමයක්ද, අවමයක්ද යන්න තීරණය කරන්න.

Note: සමහර වක්‍රවල හැරුම් ලක්ෂ්‍ය එකක් පවතී.
සමහර වක්‍රවල හැරුම් ලක්ෂ්‍ය එකකට වඩා පවතී.
සමහර වක්‍රවල හැරුම් ලක්ෂ්‍ය නොපවතී.

① පහත වක්‍රවල උපරිම / අවම ලක්ෂ්‍ය පවතී දැයි සොයන්න

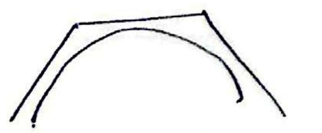
① $y = 7x - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 7 - 2x$$

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය පැවතීමට $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$0 = 7 - 2x$
$x = \frac{7}{2}$

	(x = 0)	$x = \frac{7}{2}$	(x = 8)
$\frac{dy}{dx}$	(+)		(−)



$x = \frac{7}{2}$ දී y ට උපරිමයක් ඇත.

② $y = \frac{x}{x^2+1}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1).1 - x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යයකදී $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$0 = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

ලවය = 0 කළ විට.

$(1 - x^2) = 1$

$x^2 = 1$, $x = -1$, $x = 1$

$\frac{dy}{dx}$	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
	$(-)$	$(+)$	$(-)$

$x = (-1)$ දී y ට අවමයක් ඇත. $x = 1$ දී y ට උපරිමයක් ඇත.

③ $y = e^x$

$\frac{dy}{dx} = e^x$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යයකදී $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය.

$0 = e^x$ ✗ [∵ සියලු x සඳහා e^x ධන වේ]

$\frac{dy}{dx} = 0$ විය නොහැක

∴ උපරිම හෝ අවම ලක්ෂ්‍ය නොමැත.

④ $y = \ln x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යයකදී $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$0 = \frac{1}{x}$ ✗ [∵ භාගයක් ශුන්‍ය වීමට
0 වීමට ලවය = 0 විය යුතුය]

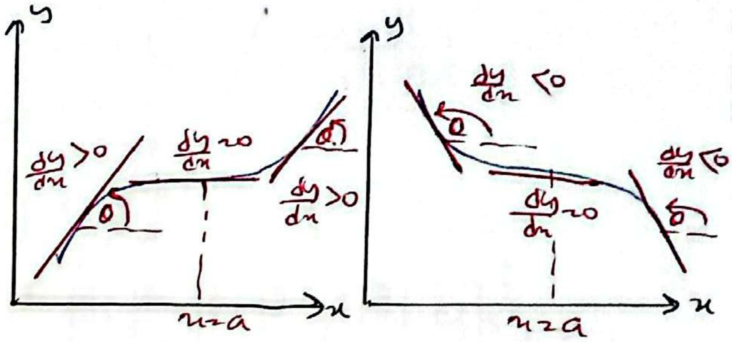
$\frac{dy}{dx} = 0$ විය නොහැක

∴ උපරිම හෝ අවම ලක්ෂ්‍ය නොමැත

03) නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය

වක්‍රයට අවතලතාවය වෙනස් වන ලක්ෂ්‍ය නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය ලෙස හැඳින්වේ

තිරස් නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය



$x = a$ හිදී y ට නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් පැවතීමට,

1) $x = a$ හිදී $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

2) $x < a$ හා $x > a$ හිදී $\frac{dy}{dx}$ එකම ලකුණ තිබිය යුතුය.

① පහත වක්‍රවල උපරිම, අවම, නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය, තිබේ නම් සොයන්න

① $y = x^3$

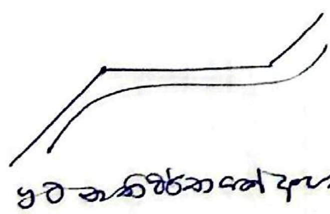
$\frac{dy}{dx} = 3x^2$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යයකදී $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$x^2 = 0$

$x = 0$

$\frac{dy}{dx}$	$(x = -1)$	$x = 0$	$(x = 1)$
	$(+)$		$(+)$



$x = 0$ දී y ට නතිවර්තනයක් ඇත.

ප්‍රස්තාර — 1. සාමාන්‍ය ප්‍රස්තාර

2. සිරස් ස්පර්ශ රේඛා සහිත සාමාන්‍ය ප්‍රස්තාර (y වල අගය = 0 නොවන ප්‍රස්තාර)

	$x=1$		$x=\frac{7}{3}$	
$\frac{dy}{dx}$	$x=0$ (+)	$x=1.5$ (−)		$x=3$ (+)

$x=1$ දී yට උපරිමයක් ඇත $x=\frac{7}{3}$ දී yට අවමයක් ඇත

01 සාමාන්‍ය ප්‍රස්තාර

පියවර:

1. වක්‍රයට ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය පවතී නම්, ඒවා සොයා ගන්න

   $\frac{dy}{dx}=0$ වන x අගයන් සොයා, අගයන් දෙපැත්තේදී $\frac{dy}{dx}$ වල ලකුණු බැලීම මගින්

2. එම ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යවලදී ; x අගයන්ට අදාළ y ඛණ්ඩාංක සොයා ගන්න.

3. $x=0$ විට ; y සොයන්න (y අක්ෂය ඡේදනය වන ස්ථානය)

4. $y=0$ විට ; x සොයන්න (x අක්ෂය ඡේදනය වන ස්ථානය)

5. $x=+\infty$, $x=-\infty$ විට y සොයන්න (x වල විශාලතම අගයන් සඳහා ... ප්‍රස්තාරය හැසිරෙන ආකාරය ...)

$x=1$ දී
$y=0(1-3)$
$y=0$

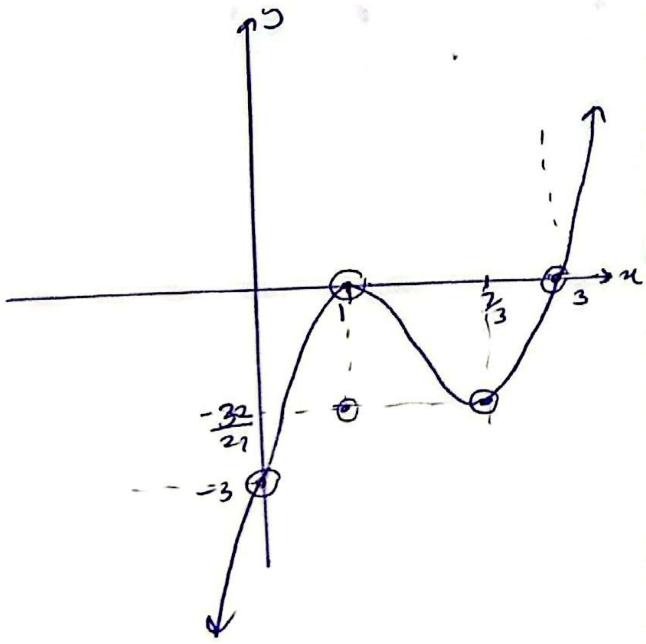
$x=0$ දී
$y=-3$

$x=+\infty$ දී
$y=\infty$

$x=\frac{7}{3}$ දී
$y=\frac{16}{9}\times -\frac{2}{3}$
$y=\left(-\frac{32}{27}\right)$

$y=0$ දී
$x=1, x=3$

$x=-\infty$ දී
$y=-\infty$



1. පහත දී ඇති ශ්‍රිතයන්හි ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සොයා ප්‍රස්තාරය දළ සටහන් කරන්න

2. $y=(x-1)^2(x-3)$

$$\frac{dy}{dx}=(x-1)^2(1)+(x-3)(2(x-1).1)$$
$$=(x-1)[(x-1)+2(x-3)]$$
$$=(x-1)[3x-7]$$
$$\frac{dy}{dx}=(x-1)(3x-7)$$

ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සඳහා $\frac{dy}{dx}=0$ විය යුතුය

$$0=(x-1)(3x-7)$$
$$x=1 \quad x=\frac{7}{3}$$

Note:

ප්‍රස්තාර ඇඳීමේදී සැලකිය යුතු මූලික කරුණු:

ශ්‍රිතයේ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය හා ප්‍රස්තාරයේ y අක්ෂ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය සොයා ඒවා ලකුණු කර ... ප්‍රස්තාරයේ හැඩය x විචල්‍යයේ අගයන් අනුව ...

[illegible]

2011 A/L

③ (i) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ යැයි ගනිමු - මෙහි a හා b යනු නියතයන් වේ. $f'(3) = 12$ හා $f''(3) = 18$ බව දී ඇත. මෙහි f' හා f'' පිළිවෙළින් ... a හා b හි අගයන් සොයන්න. a හා b මෙම අගයන් සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් හැරවුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් අඳින්න. එනයින් $2x^2 + ax + b = 3/x$ සමීකරණයේ තාත්වික මූල ගණන සොයන්න.

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$

$12 = 6.9 + 2a3 + b$

$f''(x) = 12x + 2a$

$18 = 12x + 2a$

$9 = 6.3 + a$

$9 - 18 = a$

$a = -9$

$b = 12$

$y = f(x)$

$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 18x + 12$

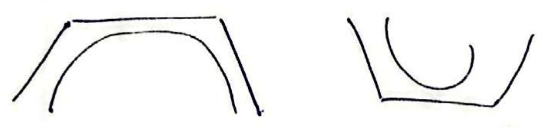
හැරවුම් ලක්ෂ්‍යවල $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$0 = 6(x^2 - 3x + 2)$

$0 = 6(x-2)(x-1)$

$x = 2,\ x = 1$

$\frac{dy}{dx}$	$(x=0)$	$x=1$	$(x=1.5)$	$x=2$	$(x=3)$
	$(+)$		$(-)$		$(+)$



$x = 1$ දී උපරිම ලක්ෂ්‍යයක් ඇත.

$x = 2$ දී අවම ලක්ෂ්‍යයක් ඇත.

$x = 1$ දී

$y = 2 - 9 + 12$

$y = 5$

$x = 2$ දී

$y = 16 - 36 + 24$

$y = 40 - 36$

$y = 4$

$x = 0$ දී

$y = 0$

$y = 0$ දී

$0 = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

$0 = x(2x^2 - 9x + 12)$

$x = 0 \quad 0 = 2x^2 - 9x + 12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 81 - 8 \times 12$

$= 81 - 96$

$\Delta = (-)$

$\Delta < 0$ බැවින් තාත්වික මූල නොමැත

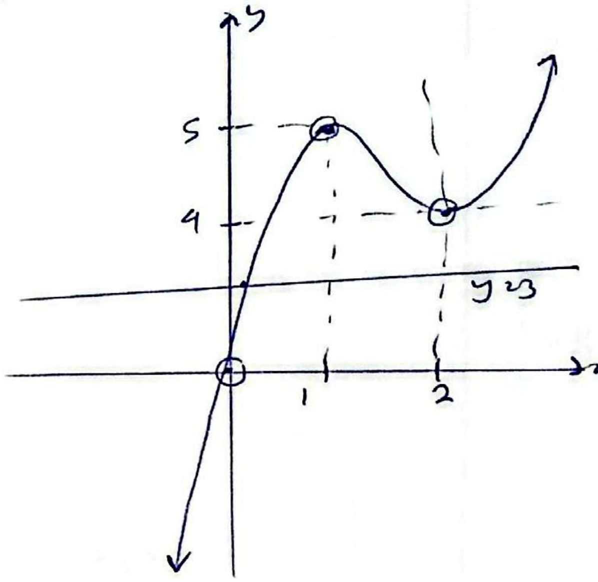
$x = +\infty$ දී

$y = x^3$

$y = \infty$

$x = -\infty$ දී

$y = -\infty$



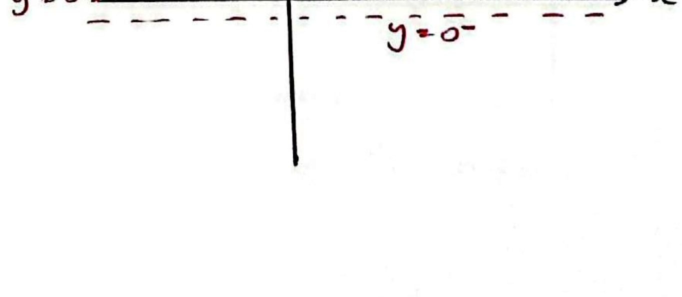
$2x^2 + ax + b = \frac{3}{x}$

$y = 3$, එක් මූලයක් ඇත

Notes

සමීකරණ $+\infty$ හෝ $-\infty$ වන විට හැසිරීම

[illegible]



① $\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^2+2x+11}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2}$

$\frac{1}{\infty}$

0^+ // [0 ට (+) දිශාවෙන් ළඟාවේ]

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+1}{4-x^3}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{-x^3}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{-x}$

$= \frac{1}{\infty}$

0^- // [0 ට (−) දිශාවෙන් ළඟාවේ]

$x=1$ දී, $y = \frac{1}{2}$

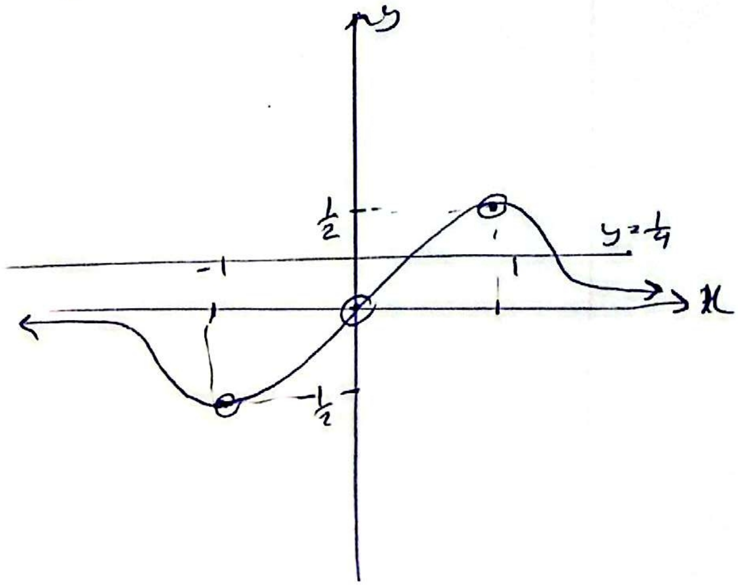
$x=-1$ දී, $y = \frac{-1}{2}$

$x=0$ දී, $y=0$

$y=0$ දී, $0 = \frac{x}{(x^2+1)}$, $x=0$

$x=+\infty$ දී, $y = \frac{x}{x^2}$, $y = \frac{1}{\infty}$, $y = 0^+$

$x=-\infty$ දී, $y = -\frac{1}{\infty}$, $y = 0^-$ //



① $y = \frac{x}{(x^2+1)}$, වක්‍රයේ ව්‍යුත්පන්නය ආශ්‍රයෙන් ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සොයා y හි උපරිම අගය සොයන්න. එමඟින් $\frac{4x}{(x^2+1)} = 1$ සමීකරණයට විසඳුම් කීයක් පවතීදැයි සොයන්න.

$y = \frac{x}{(x^2+1)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)\cdot 1 - x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

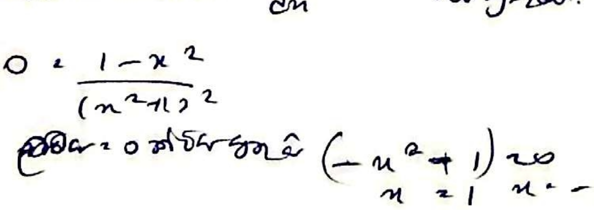
ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයේදී $\frac{dy}{dx} = 0$ වේ.

$0 = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

ලවය = 0 විය යුතුයි $(-x^2+1) = 0$

$x=1$, $x=-1$

	$x=-1$		$x=1$	
$\frac{dy}{dx}$	(−)/(+) (−)		(+)/(+) (+)	(−)/(+) (−)



$x=-1$ දී y හි අවම අගය

$x=1$ දී y හි උපරිම අගය

$4y = 1$

$y = \frac{1}{4}$ විසඳුම් 2ක් ඇත.

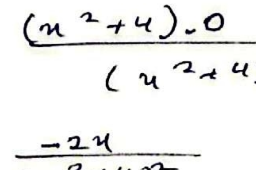
② $y = \frac{1}{x^2+4}$ වක්‍රයේ ව්‍යුත්පන්නය භාවිතයෙන් ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සොයා y හි උපරිම අගය

$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+4)\cdot 0 - 1\cdot(2x)}{(x^2+4)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$

ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයේදී $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

	$x=0$	
$\frac{dy}{dx}$	(+)	(−)



$x=0$ දී y හි උපරිම අගය

$x = 0$ දී

$y = \frac{1}{4}$

$y = 0$ දී

$0 = \frac{1}{x^2+4}$

$\neq$

∴ x අගයක් නොපවතී

$x = +\infty$ දී

$y = \frac{1}{x^2}$

$y = \frac{1}{\infty^2}$

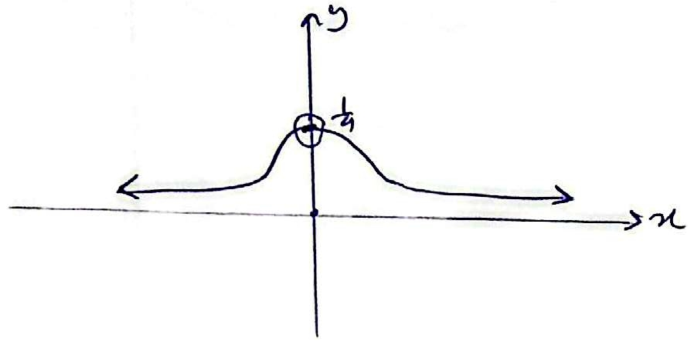
$y = 0^+$

$x = -\infty$ දී

$y = \frac{1}{x^2}$

$y = \frac{1}{\infty^2}$

$y = 0^+$

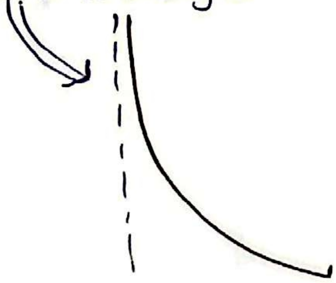


Note: ස්පර්ශෝන්මුඛ යනු

කිසියම් වක්‍රයකට අනන්තයේදී ස්පර්ශ වනසේ ඇඳිය හැකි රේඛාවක්. ස්පර්ශෝන්මුඛ වර්ග 2කි.

① තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ

② සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ



Note:

① $\frac{▨}{0} \to \infty$ නම් අර්ථ නොදැක්වේ.

2. උදා: $\frac{1}{0^+} = +\infty$ | $\frac{1}{0^-} = -\infty$

02 සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ සොයා ගැනීම

[y වල හරය ශුන්‍ය වන ප්‍රශ්න]

y වල හරය ශුන්‍ය වන x අගයන් වලදී, සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ ලැබේ.
(∵ y වල හරය 0 වන විට, y අර්ථ දක්වා නොමැත)

* y වල හරය ශුන්‍ය වන x අගයන් වලදී y අර්ථ දක්වා නොමැත.
* y වල හරය ශුන්‍ය වන x අගයට ආසන්න x අගයන් වලදී, $y = +\infty$ හෝ $y = -\infty$ වේ.

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ ඇඳීම

පියවර: ① y වල හරය 0 වන x අගයන් සෙවීම. එමගින් සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ ඇඳීම.
② එම x අගයට ඉතා ආසන්න දෙපසින් x අගයන් වලදී y අගය ∞ ද යන්න සොයා රිකල මගින් ඇඳීම

① $y = \frac{1}{x^2-9}$

$y = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$

y වල හරය = 0 විට

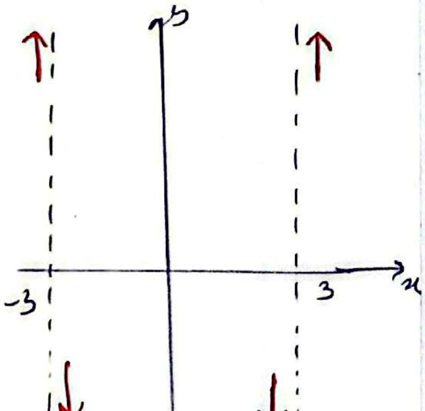
$x = 3$, $x = -3$

$x = 3^+$: $y = (+)$, $y = +\infty$

$x = 3^-$: $y = (-)$, $y = -\infty$

$x = -3^+$: $y = (-)$, $y = -\infty$

$x = -3^-$: $y = \frac{(+)}{(-)(-)}$, $y = (+)$, $y = +\infty$



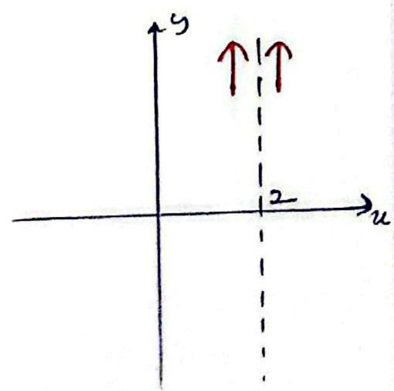
② $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

y වල හරය = 0 විට

$x = 2$

$x = 2^+$: $y = \frac{(+)}{(+)}$, $y = (+)$, $y = +\infty$

$x = 2^-$: $y = +\infty$



සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ සහිත ප්‍රස්තාර ඇඳීම

පියවර ① සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ සොයා ගැනීම
(y හි හරය ශුන්‍ය වන x අගයන්)

② ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සොයා ගැනීම
($\frac{dy}{dx} = 0$ වන x අගයන්)

③ එම x අගයන්ට අදාළ y අගයන් සොයන්න.

④ $x = 0$ විට, y හා $y = 0$ විට, x සොයන්න.

⑤ $x = +\infty$ විට y හා $x = -\infty$ විට y සොයන්න

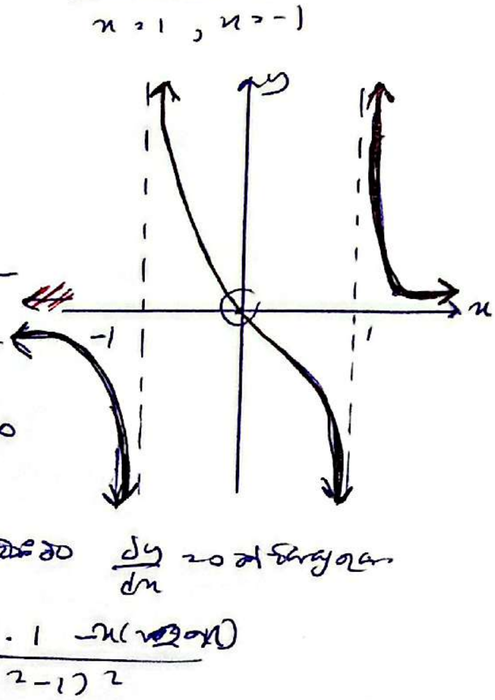
① ස්පර්ශෝන්මුඛ හා ව්‍යුත්පන්නය භාවිතයෙන් ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සොයා y හි ප්‍රස්තාරය දළ සටහන් කරන්න

① $y = \frac{x}{x^2-1}$ [$x \neq \pm 1$]

y හි හරය = 0 විට
$x = 1$, $x = -1$

$x = 1^+$	$x = 1^-$
$y = \frac{(+)}{(+)}$	$y = \frac{(+)}{(-)}$
$y = (+)$	$y = (-)$
$y = +\infty$	$y = -\infty$

$x = -1^+$	$x = -1^-$
$y = \frac{(-)}{(-)}$	$y = \frac{(-)}{(+)}$
$y = (+)$	$y = (-)$
$y = +\infty$	$y = -\infty$



ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සෙවීමට $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-1) \cdot 1 - x(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$0 = x^2 + 1$

$x^2 = (-1)$ ✗ [∴ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය නොමැත]

$x = 0$ දී	$y = 0$ දී
$y = 0$	$x = 0$

$x = +\infty$ දී	$x = -\infty$ දී
$y = \frac{1}{x} = 0^+$	$y = \frac{1}{x} = 0^-$

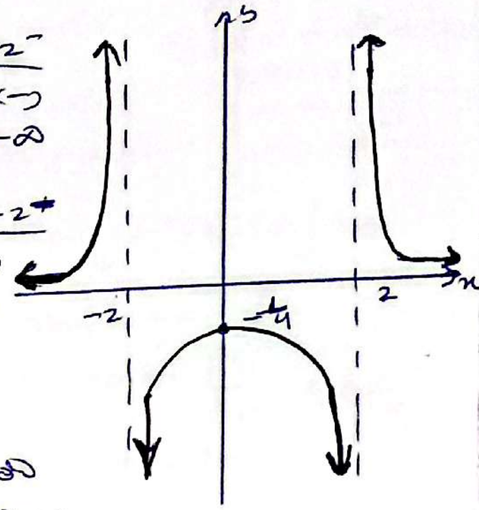
Note:- ස්පර්ශෝන්මුඛ කිසිවිටෙක ප්‍රස්තාරයෙන් කැපෙන්නේ නැත.
ස්පර්ශෝන්මුඛ ප්‍රස්තාර කොටස් අතර පමණක් ප්‍රස්තාර කොටස් වේ.

② $y = \frac{1}{x^2-4}$ [$x \neq \pm 2$]

y හි හරය = 0 විට
$x = 2$, $x = -2$

$x = 2^+$	$x = 2^-$
$y = \frac{(+)}{(+)}$	$y = (-)$
$y = +\infty$	$y = -\infty$

$x = -2^+$	$x = -2^-$
$y = (-)$	$y = (+)$
$y = -\infty$	$y = +\infty$



ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සෙවීම
$\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-4) \cdot 0 - 1 \cdot (2x)}{(x^2-4)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

		$x = 0$	
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{(+)}{(+)}$ (+)		$\frac{(-)}{(+)}$ (−)

$x = 0$ දී y උපරිමයක් ඇත

$x = 0$ දී	$y = 0$ දී
$y = -\frac{1}{4}$	$0 = \frac{1}{x^2-4}$ ✗ [∴ x සඳහා විසඳුමක් නැත]

$x = +\infty$ දී	$x = -\infty$ දී
$y = \frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{x^2}$
$y = 0^+$	$y = 0^+$

අවතලතා වල

අවතලතා වර්ග 2

① උඩු අවතල

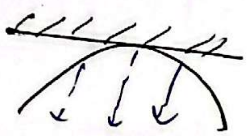
කිසියම් ප්‍රාන්තරයක් තුළදී වක්‍රයකට ස්පර්ශකයක් ඇඳි විට, ස්පර්ශකයට ඉහළින් වක්‍රය පවතී නම්, එම ප්‍රාන්තරයේදී වක්‍රය උඩු අවතල වේයැයි කියනු ලැබේ.

යම් ප්‍රාන්තරයක් තුළ, වක්‍රයක් උඩු අවතලනම් නම්, එම ප්‍රාන්තරයේදී $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ වේ.

[$f''(x) > 0$ වේ]

② යටි අවතල

කිසියම් ප්‍රාන්තරයක් තුළදී වක්‍රයකට ස්පර්ශකයක් ඇඳි විට එම ස්පර්ශකයට පහළින් වක්‍රය පවතී නම් එම ප්‍රාන්තරයේදී වක්‍රය උඩු අවතල වේයැයි කියනු ලැබේ.



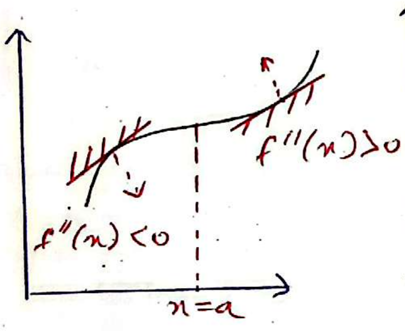
යම් ප්‍රාන්තරයක් තුළ, වක්‍රයක් යටි අවතලනම් නම්, එම ප්‍රාන්තරයේදී $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ වේ.

[$f''(x) < 0$ වේ]

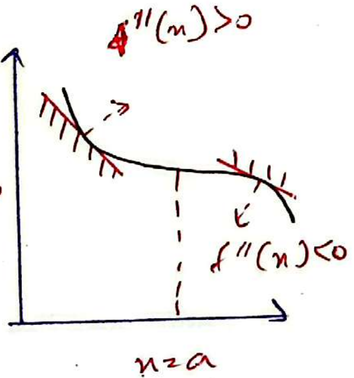
නතිවර්තන [දෙවන අවකලන සැලකීමෙන්]

වර්ග 4 ක් වේ

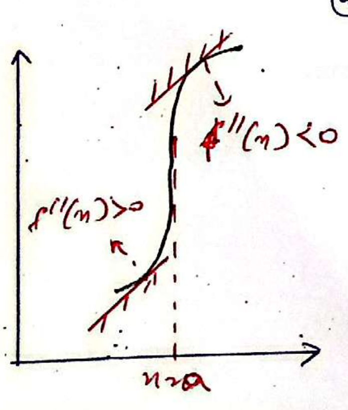
①



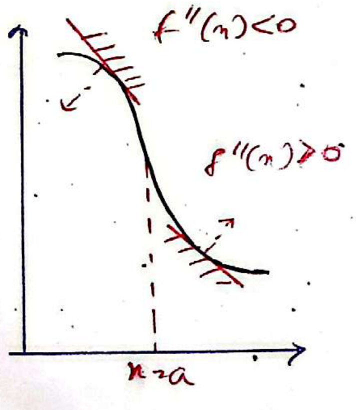
②



③



④



නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය සෙවීමේදී දෙවන අවකලය සැලකීමෙන් → ඉතා

පළමු අවකලන සැලකීමෙන් → නිරීක්ෂණ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය

ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සෙවීම-ඒවා වර්ග

① හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සෙවීම - $\frac{dy}{dx}$ භාවිතා කරයි

② නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය සෙවීම $\frac{d^2y}{dx^2}$ භාවිතා කරයි

$-\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ [$f''(x)=0$] වන x වල අගය සොයා එම අගය දෙපැත්තේ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ලකුණු මාරුවීමට විය යුතුය

③ ස්පර්ශෝන්මුඛ — සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ

④ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ — $x \to \infty$, $x \to -\infty$ (සැලකීමෙන්)

① $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ [$x \neq \pm 3$]

$f'(x)$ මගින් හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සොයන්න. තවද ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y=f(x)$ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

$$f'(x) = \frac{(x^2-9).1 - x.(2x)}{(x^2-9)^2}$$

$$= \frac{x^2-9-2x^2}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

$$= \frac{-9-x^2}{[(x-3)(x+3)]^2}$$

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සඳහා $f'(x)=0$ විය යුතුය

$x \neq \pm 3$

$9+x^2=0$

$x^2=-9$ ✗

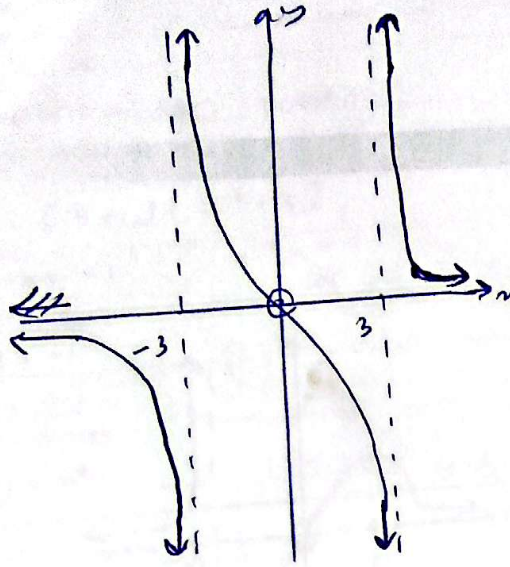
∴ හැරුම් ලක්ෂ්‍ය නොමැත

ස්පර්ශෝන්මුඛයේදී y හි අගය ∞ වන නිසා

$0=(x-3)(x+3)$

$x=3$, $x=-3$

$x=3^+$	$x=3^-$	$x=-3^+$	$x=-3^-$
$y=\frac{+}{+}$	$y=\frac{+}{(-)}$	$y=\frac{-}{-}$	$y=\frac{-}{(+)}$
$y=+\infty$	$y=-\infty$	$y=+\infty$	$y=-\infty$



① f(x) අඩුවන x වල අගය පරාසය
ලබා ගන්න.
f'(x) < 0 වන යුගලය

~~$-\infty < x < \infty$~~

$x \in \mathbb{R} \setminus \{x \neq -3, 3\}$

$-\infty < x < -3$ හෝ $-3 < x < 3$ හෝ
$3 < x < \infty$

Note: f(x) අඩුවන x වල අගය පරාසය
→ f'(x) < 0 වන යුගලය

f(x) වැඩිවන x වල අගය පරාසය
→ f'(x) > 0 වන යුගලය
සංගත කරන්න

* හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සෙවීමේදී $\frac{dy}{dx} = 0$ න්
විසඳුම් ලබාගත් සංගතකරණයට අදාළ
හරය = 0, ලවය = 0 වන අගයන්
ඔක්කොම ගන්න ඕනේ, ලකුණු දෙනව.

* සංගතකරණයට ගන්න කලින්
7 ගනන් එකවුරු කරලා check කරන්න

$\frac{dy}{dx}$ වල ;

හරය = 0, $x = 3$, $x = -3$

ලවය = 0 ✗

	$(x=-4)$	$x=-3$	$(x=0)$	$x=3$	$(x=4)$
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{(-)}{(+)}$ (−)		$\frac{(-)}{(+)}$ (−)		$\frac{(-)}{(+)}$ (−)

ස්පර්ශෝන්මුඛ හැසිරීම

$x \to +\infty$
$y = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$
$= 0^+$

$x \to -\infty$
$y = 0^-$

$x = 0$;
$y = 0$

② $x \neq -1$ සඳහා $f(x) = \frac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$

ව්‍යුත්පන්නය . $x \neq -1$ සඳහා

$$f'(x) = \frac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

බව පෙන්වන්න . හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා
ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ
දළ සටහන් අඳින්න. $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරය
භාවිතයෙන් $(x+1)(x^2+3) = 16x$
සමීකරණයේ විසඳුම් ගණන සොයන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සඳහා $f'(x) = 0$ විය යුතුයි

$0 = (1-x)(2x^2+3x+3)$

$x = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 9 - 4.6$
$= 9 - 24$
$\Delta = (-)$
මූල තාත්වික නොවේ ✗

$\frac{dy}{dx}$ වල ;

හරය = 0, $x = -1$

ලවය = 0, $x = 1$

		$x=-1$		$x=1$	
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{(+)(+)}{(+)}$ (+)		$\frac{(+)(+)}{(+)}$ (+)		$\frac{(-)(+)}{(+)}$ (−)

$x = 1$ දී උපරිම
අගයක් ඇත.

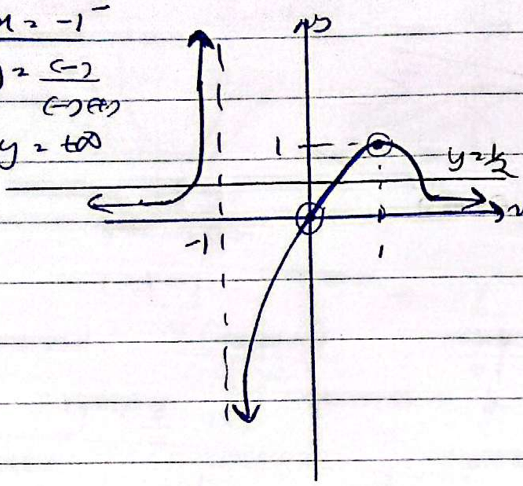
තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය සෙවීමට
y ශුන්‍ය 20 කිරීමෙන්

$0 = (x+1)(x^2+3)$

$x = -1$ $\quad x^2 = -3$ ✗

$x = -1^+$ $\quad y = \frac{(-)}{(+)(+)} = -\infty$

$x = -1^-$ $\quad y = \frac{(-)}{(-)(+)}$ $\quad y = +\infty$



තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය සෙවීමට

$x \to +\infty$ $\quad y = \frac{x}{x^3}$ $\quad y = \frac{1}{x^2}$ $\quad y = 0^+$

$x \to -\infty$ $\quad y = 0^+$

$x = 0$ දී $\quad y = 0$

$x = 1$ දී $\quad y = \frac{8}{2 \cdot 4} = 1$

$y = \frac{2x}{4x \cdot x} = \frac{1}{2}$

නිවැරදි නම් දක්වා.

(3) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සොයන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$f'(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot 4x - (2x^2+1) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4}$

$= \frac{(x^2-2x+1)4x - 2[2x^3-2x^2+x-1]}{(x-1)^4}$

$= \frac{4x^3 - 8x^2 + 4x - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 2}{(x-1)^4}$

$= \frac{-4x^2+2x+2}{(x-1)^4}$

$= \frac{-2(2x^2-x-1)}{(x-1)^4}$

$= \frac{-2(x-1)(2x+1)}{(x-1)^3}$

$f'(x) = \frac{-2(2x+1)}{(x-1)^3}$

(1) සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය සෙවීමට
y ශුන්‍ය 20

$0 = (x-1)$

$x = 1$

$x = 1^+$ $\quad y = \frac{(+)}{(+)}$ $\quad y = +\infty$

$x = 1^-$ $\quad y = \frac{(+)}{(+)}$ $\quad y = +\infty$

(2) තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය සෙවීමට

$x \to +\infty$ $\quad y = \frac{2x^2}{x^2}$ $\quad y = 2$

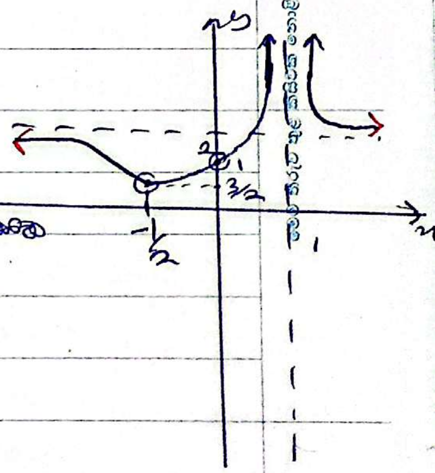
~~$y = 2^+$~~

(3) හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සෙවීමට

$\frac{dy}{dx} = 0$

$0 = 2x + 1$

$x = -\frac{1}{2}$ ✗

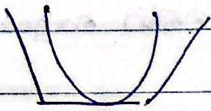


$\frac{dy}{dx}$ වල ;

ශුන්‍ය $= 0$, $x = 1$

ඉවත් $= 0$, $x = \frac{1}{2}$ ✗

$\frac{dy}{dx}$		$x = -\frac{1}{2}$ ✗		$x = 1$	
	$\frac{(+)}{(-)}$		$\frac{(-)}{(-)}$		$\frac{(-)}{(+)}$
	$(-)$		$(+)$		$(-)$



$x = -\frac{1}{2}$ දී ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යය

$x = -\frac{1}{2}$ දී

$y = \frac{+2(\frac{1}{2}+1)}{(x-3)^2}$

$y = \frac{\frac{9}{2}+1}{\frac{1}{4}}$

$y = \frac{2+4}{\frac{4}{4}}$

$y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x = 0$ දී

$y = \frac{+1}{+1}$

$y = 1$

$y = 0$ දී

$x^2 = -\frac{1}{2}$

∴ ඡේදනය නොවේ.

* ස්ථාවර ස්ථානීකුතුව වක්‍රයෙන් [illegible]

* ස්ථාවර ස්ථානීකුතුව වක්‍රයෙන් [illegible]

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයේ [illegible] ස්ථානීකුතුව, නැවතුම් ලක්ෂ්‍ය හා [illegible] $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ මූල ලක්ෂ්‍ය [illegible]

$f'(x) = \frac{(x-3)^2(4x-3.1) - (2x^2-3x).2(x-3)}{(x-3)^4}$

$= \frac{(x^2-6x+9)(4x-3) - (2x^2-3x)(2x-6)}{(x-3)^4}$

$f'(x) = \frac{9(1-x)}{(x-3)^3}$

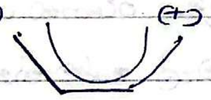
ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සඳහා $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$\frac{dy}{dx}$ වල

ශුන්‍ය $= 0$, $x = 3$

ඉවත් $= 0$, $x = 1$ ✗

$\frac{dy}{dx}$		$x = 1$		$x = 3$	
	$\frac{(+)}{(-)}$		$\frac{(-)}{(-)}$		$\frac{(-)}{(+)}$
	$(-)$		$(+)$		$(-)$



④ $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \frac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x) = \frac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව, ඒනයින්, $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තරය සොයන්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x) = \frac{18x}{(x-3)^4}$ බව දී ඇත.

$f'(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තරය

$f'(x) > 0$

$1 > x > 3$

$f'(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තරය

$f'(x) < 0$

$x < 1$ හෝ $3 < x$

මෙම තීරුවේ කිසිවක් නොලියන්න / இப்பகுதியினுள் எதுவும் எழுதுதலாகாது.

ප්‍රශ්න අංකය : / வினா எண் :

විභාග අංකය : / பரீட்சைச் சுட்டெண் :

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ හැසිරීම,

y ∞ නම් $x = 0$

$x = 3$

$x = 3^+$

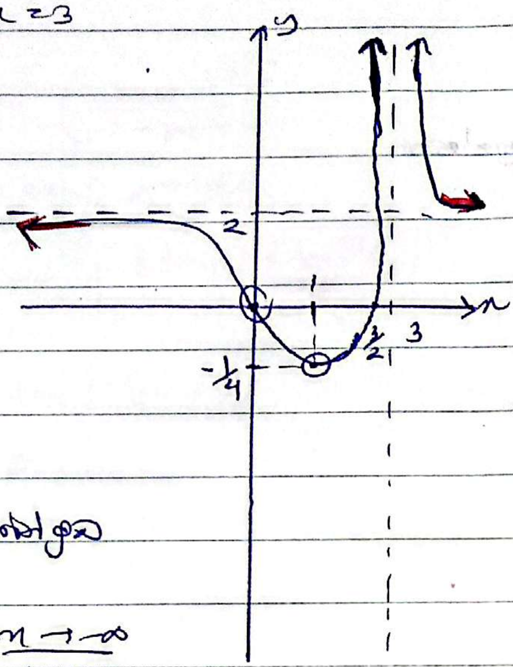
$y = \frac{(+)}{(+)}$

$y = +\infty$

$x = 3^-$

$y = \frac{(+)}{(+)}$

$y = +\infty$



තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ හැසිරීම

$x \to +\infty$, $x \to -\infty$

$y = \frac{2x^2}{x^2}$, $y = 2$

$y = 2$

නැවුම් ලක්ෂ්‍ය.

$f''(x) = 0$ විසඳීමෙන්

$f''(x) = 0$

ලවය $= 0$, $x = 3$

මවය $= 0$, $x = 0$

		$x=0$		$x=3$	
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{(-)}{(+)}$		$\frac{(+)}{(+)}$		$\frac{(+)}{(+)}$
	$(-)$		$(+)$		$(+)$
	යටි ඇපකම		උඩු ඇපකම		උඩු ඇපකම

නැවුම් ලක්ෂ්‍ය මනය

y ට අක්ෂ ඡේදනය

$x = 0$ දී , $y = 0$

$x = 1$ දී , $y = \frac{-1}{4}$

$y = 0$ දී , $x = 0, x = \frac{3}{2}$

සංයුක්ත ශ්‍රිතවල ඉතා වැදගත්
ගැටලුවලදී සමහර අවස්ථාවල
පොදු ත්‍රිකෝණමිතික සූත්‍ර යොදා
ගැටලුව සුළු කරගත හැකි
වේ.

(1) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$

$x = \tan\theta$ ලෙස ගනිමු.

$y = \tan^{-1}\left[\dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right]$

$y = \tan(\tan 3\theta)$

$y = 3\theta$

$y = 3\tan^{-1}x$

$\dfrac{dy}{dx} = 3 \times \dfrac{1}{(1+x^2)}$

---

(2) $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

$x = \tan\theta$

$y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$y = \sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$y = 2\theta$

$y = 2\tan^{-1}x$

$\dfrac{dy}{dx} = 2 \times \dfrac{1}{(1+x^2)}$

---

(3) $y = \tan^{-1}\left[\dfrac{x}{1+6x^2}\right]$

$y = \tan^{-1}\left[\dfrac{3x - 2x}{1 + 3x \cdot 2x}\right]$

$y = \tan^{-1}\left[\dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}\right]$

$y = \tan^{-1}[\tan(A-B)]$

$y = (A-B)$

$y = \tan^{-1}3x - \tan^{-1}2x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 - \dfrac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2$

$y = \tan^{-1}\left[\dfrac{2k}{k^2e^{-x} - e^x}\right]$

$y = \tan^{-1}\left[\dfrac{2k}{\frac{k^2}{e^x} - e^x}\right]$

$y = \tan^{-1}\left[\dfrac{2ke^x}{k^2 - e^{2x}}\right]$

$\div k^2$, $\div k^2$ $\quad y = \tan^{-1}\left[\dfrac{\frac{2e^x}{k}}{1 - \frac{e^{2x}}{k^2}}\right]$

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\left(\frac{e^x}{k}\right)}{1 - \left(\frac{e^x}{k}\right)^2}\right)$

$\dfrac{e^x}{k} = \tan\theta$ ලෙස ගනිමු

$y = \tan^{-1}\left[\dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}\right]$

$y = 2\theta$

$y = 2\tan^{-1}\left(\dfrac{e^x}{k}\right)$

$\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{1}{1+\left(\frac{e^x}{k}\right)^2} \cdot \left[\dfrac{k \cdot e^x - e^x \cdot 0}{k^2}\right]$

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{a + b\cos x}{a - b\cos x}\right)$ නම් $\dfrac{dy}{dx}$?

$\div a$, $\div a$ $\quad y = \tan^{-1}\left[\dfrac{1 + \frac{b}{a}\cos x}{1 - \frac{b}{a}\cos x}\right)$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad \tan\beta = \frac{b}{a}\cos x$

$y = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\right]$

$y = \frac{\pi}{4} + \beta$

$y = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\cos x\right)$

$\dfrac{dy}{dx} = 0 + \dfrac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\cos x\right)^2} \cdot \frac{b}{a}(-\sin x)$

$\dfrac{dy}{dx} = -\sin x\,\frac{b}{a} \cdot \dfrac{1}{(1+(\frac{b}{a}\cos x)^2)}$

② උපරිම හා අවම අගයන් ගැටලු

පියවර

① ගැටලුවේ උපරිමය/අවමය අවශ්‍ය ප්‍රකාශනය මෙය y ලෙස ගන්න

② සාධාරණ අවශ්‍යතාවය දී ඇති දත්ත ඇසුරින් [illegible]

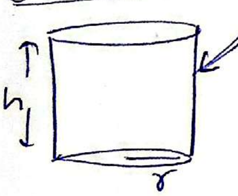
③ එක් හෝ විචල්‍යයක x වලින් පමණක් පොදු උපරිමය හෝ අවමය ම අවශ්‍ය ප්‍රකාශනය x හා විචල්‍යයන් ලියා ගන්න

(හෝ විචල්‍ය x හා විචල්‍යයන් [illegible] x, z වැනි විචල්‍යයන් දෙකක් [illegible] දී ඇති [illegible] විචල්‍යයට හරවා ගන්න)

④ ප්‍රශ්නය අවශ්‍යතාවයට උපරිම/අවම [illegible]

Notes

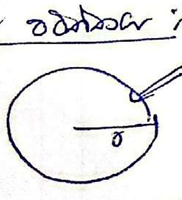
① සිලින්ඩරය



$V = \pi r^2 h$

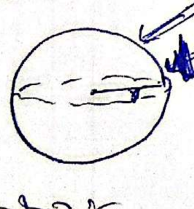
$A = 2\pi r h$

② වෘත්තය



$A = \pi r^2$

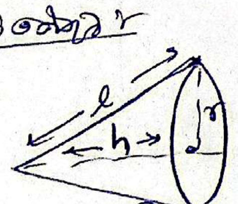
③ ගෝලය



$A = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

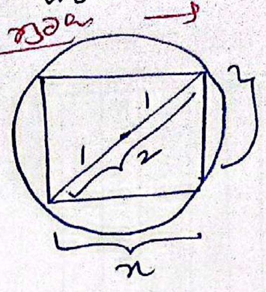
④ කේතුව



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$A = \pi r l$

① අරය = 1m වූ වෘත්තයක් [illegible] ඇති උපරිම වර්ගඵලයක් සහිත සෘජුකෝණාස්‍රයේ දිග හා පළල සොයන්න



වර්ගඵලය = y ලෙස ගනිමු.

$$y = x\sqrt{2^2 - x^2} \quad (1)$$

y උපරිමයක් හෝ අවමයක් වීමට, $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) + \sqrt{2^2 - x^2} \cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$0 = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

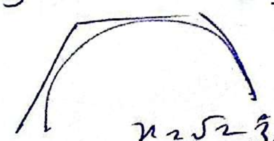
$4 - 2x^2 = 0$ විය යුතුය

$2 = x^2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$x = +\sqrt{2}$ → x සෘණ වීමට නොහැකි නිසා (∴ (−) අගය ඉවත් කරයි)

	$x = \sqrt{2}$ ට පෙර	$x = \sqrt{2}$ ට පසු
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{(+)}{(+)}$ = (+)	$\frac{(-)}{(+)}$ = (−)



$x = \sqrt{2}$ දී y උපරිමයක් වේ.

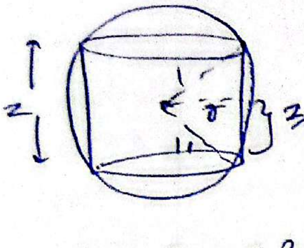
එවිට

$x = \sqrt{2}$

$\sqrt{4-2} = \sqrt{2}$

දිග = පළල = $\sqrt{2}$ m

② අරය 1m වන ඝන ගෝලයකින් සිලින්ඩරයක් කපා ගනු ලැබේ. සිලින්ඩරයේ පරිමාව උපරිම වන විට සිලින්ඩරයේ අරය සොයන්න



$y = \pi r^2 z$

$y = \pi r^2 z$

$y = \pi r^2 \, 2\sqrt{1-r^2}$

$1 = r^2 + \frac{z^2}{4}$

$r^2 = 1 - \frac{z^2}{4}$

$\sqrt{4-4r^2} = z$

$z = 2\sqrt{1-r^2}$

$\frac{dy}{dx} = 2\pi\left[r^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-r^2}} \cdot -2r + \sqrt{1-r^2} \cdot 2r\right]$

$= 2\pi\left[\frac{-r^3}{\sqrt{1-r^2}} + 2r\sqrt{1-r^2}\right]$

$= 2\pi r\left[\frac{-r^2 + 2 - 2r^2}{\sqrt{1-r^2}}\right]$

$\frac{dy}{dx} = 2\pi r\left[\frac{2-3r^2}{\sqrt{1-r^2}}\right]$

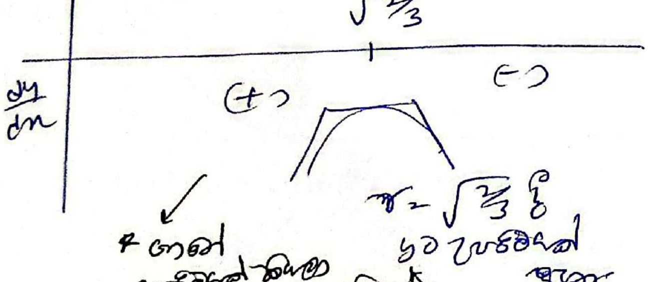
y ට උපරිමයක් හෝ අවමයක් පැවතීමට $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$2\pi r(2-3r^2) = 0$ විය යුතුය

$r^2 = \frac{2}{3}$ හෝ $r = 0$ ✗

$r = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$r = \sqrt{\frac{2}{3}}$

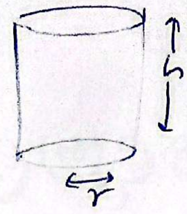


$r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ දී y ට උපරිමයක් ඇත

r හෝ උපරිමයක් නිසා ... පරිමාව උපරිම වන

$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\ m$ //

③ සංවෘත සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් එහි පරිමාව $1024\pi cm^3$ වන සේ ද සෑදිය යුතුව ඇත. අවම පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ඇතිවන සිලින්ඩරයේ අරය සොයන්න



$1024 = \pi r^2 h$

$h = \frac{1024}{\pi r^2}$

$y = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$= 2\pi r \frac{1024\pi}{\pi r^2} + 2\pi r^2$

$y = 2\pi \frac{1024\pi}{\pi r} + 2\pi r^2$

$y = \frac{2048\pi}{r} + 2\pi r^2$

$\frac{dy}{dx} = \left[2048\left(-\frac{1}{r^2}\right)\pi\right] + 2\pi \cdot 2r$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2048\pi}{r^2} + 4\pi r$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2048\pi + 4\pi r^3}{r^2}$

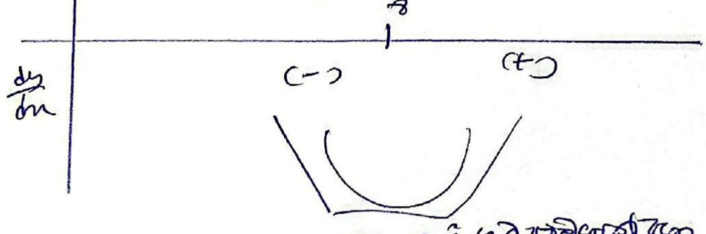
y ට උපරිමයක් හෝ අවමයක් පැවතීමට $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$4\pi r^3 - 2048\pi = 0$ විය යුතුය

$r^3 = 512$

$r = 8$

$r = 8$

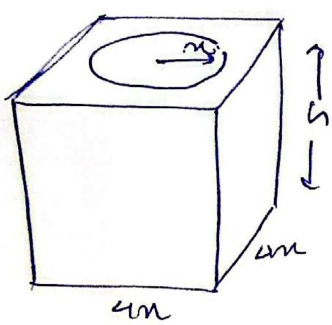


$r = 8$ දී y ට අවමයක් ඇත

$r = 8\ cm$ //

③ සමචතුරස්‍රාකාර පතුලක් සහිත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙට්ටියක් තුළ ආකාරයට සාදා ඇත. පෙට්ටියේ පරිමාව 8192 cm³ වේ. සමචතුරස්‍රාකාර පතුලෙහි පැත්තක දිග 4x cm ලෙස ගනිමු. අරය x cm වන වෘත්තාකාර සිදුරක් ඉහළ සමචතුරස්‍රාකාර මුහුණතෙන් කපා ඉවත් කර ඇත. සිදුර සහිත පෙට්ටියේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය වන A cm² යන්න $A=(32-\pi)x^2+\frac{8192}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

තවද $x=\frac{16}{\sqrt[3]{32-\pi}}$ වන විට A අවම වන බව පෙන්වන්න.



$$\frac{512}{2048}$$

$$8192 = 16x^2 \times h$$

$$h = \frac{512}{x^2}$$

$$A = 4h \cdot 4x + 16x^2 + (16x^2 - \pi x^2)$$

$$A = \frac{16 \cdot 512}{x} + 16x^2 + (16x^2 - \pi x^2)$$

$$A = (32-\pi)x^2 + \frac{8192}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = (32-\pi)\cdot 2x + 8192\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(32-\pi)x - \frac{8192}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left[\frac{32x^3 - \pi x^3 - 4096}{x^2}\right]$$

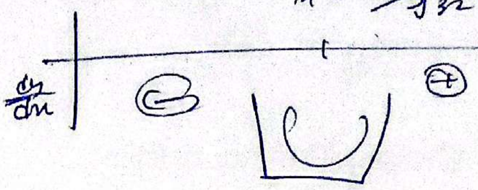
A ට ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය ලබා ගැනීමට $\frac{dy}{dx}=0$ විය යුතුය

$(32-\pi)x^3 - 4096 = 0$ විය යුතුය

$$x^3 = \frac{4096}{(32-\pi)}$$

$$x = \frac{16}{\sqrt[3]{32-\pi}}$$

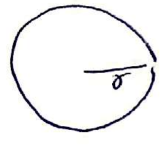
$$x = \frac{16}{\sqrt[3]{32-\pi}}$$



$x=\frac{16}{\sqrt[3]{32-\pi}}$ හිදී A ට අවමයක් ඇත

$x = \frac{16}{\sqrt[3]{32-\pi}}$ වන විට A අවම වේ

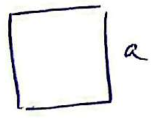
④ දෙනලද l දිගින් යුත් කම්බියක් කොටස් දෙකකට කපා ඇත. එක කොටසක් වෘත්තයක හැඩයට නවා ඇති අතර අනෙක් කොටස සමචතුරස්‍රයක හැඩයට නවා ඇත. වෘත්තයේ හා සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵල වල එකතුව වන A(x) යන්න $A(x)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(l-x)^2}{16}$ වර්ගඵලය, මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි x යනු වෘත්තයේ හැඩයට නවා ඇති කම්බි කොටසේ දිගයි. එනයින් සමචතුරස්‍රයේ පාදයක්, වෘත්තයේ විෂ්කම්භයට සමාන වන විට A(x) වර්ගඵලය අවම වන බව පෙන්වන්න.



$$x = 2\pi r$$

$$A^1 = \pi r^2 = \pi \frac{x^2}{4\pi^2}$$

$$A^1 = \frac{x^2}{4\pi}$$



$$(l-x) = 4a$$

$$A^2 = a^2$$

$$A^2 = \frac{(l-x)^2}{16}$$

$$A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16} \quad \text{— ①}$$ වර්ගඵලය

~~$a = r$ වනවිට~~

~~$\frac{(l-x)}{4} = \frac{x}{2\pi}$~~

~~$(l-x)\pi = 2x$~~

~~$l\pi = x(2+\pi)$~~

~~$x = \frac{l\pi}{(2+\pi)}$~~

~~$(l-x) = \frac{2x}{\pi}$~~

~~$A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{x^2}{4\pi}$ — ②~~

~~$A(x) = \frac{x^2}{2\pi}$~~

(b) A(x) ය y ලෙස ගනිමු

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\pi}$

(c) / A(x) – y ලෙස ගනිමු.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\pi} 2 \cdot x + \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot (l-x) \cdot -1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2\pi} - \frac{(l-x)}{8}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2\pi} - \frac{x}{4\pi}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-x}{4\pi}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4\pi}$

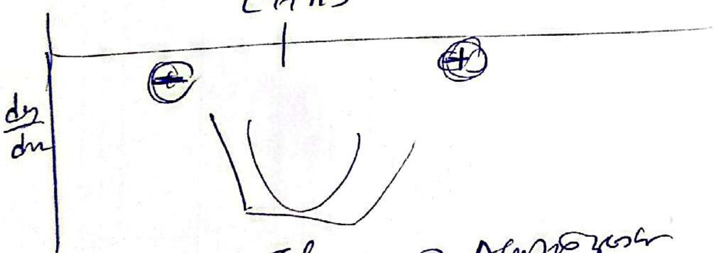
$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - (l-x)\pi}{8\pi}$

$= \frac{4x - \pi l + \pi x}{8\pi}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(4+\pi)x - \pi l}{8\pi}$

$\frac{dy}{dx} = 0$ විට.

$x = \frac{\pi l}{(4+\pi)}$



$x = \frac{\pi l}{(4+\pi)}$ හිදී. A(x) අවමයක් ලැබේ

$x = \frac{\pi l}{(4+\pi)}$, $a = 0/2$

වෘත්තයේ අරය $= \frac{l}{4+\pi}$ —(1)

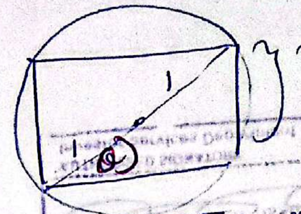
සමචතුරස්‍රයේ පැත්තක දිග $= \frac{1}{4}\left(l - \frac{\pi l}{4+\pi}\right)$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{4l + \pi l - \pi l}{4+\pi}\right]$

$= \frac{l}{4+\pi}$ —(2)

(1) = (2)

(c) පැවරුම



$y = 2\cos\theta \times 2\sin\theta$

$y = 2\sin 2\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos 2\theta \cdot 2 \cdot 1$

$= 4\cos 2\theta$

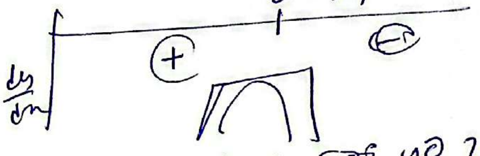
y හි උපරිමයක් හෝ අවමයක් ලබාගැනීමට $\frac{dy}{d\theta} = 0$ විය යුතුය

$\cos 2\theta = 0$

$2\theta = \pi/2$

$\theta = \pi/4$

$\theta = \pi/4$

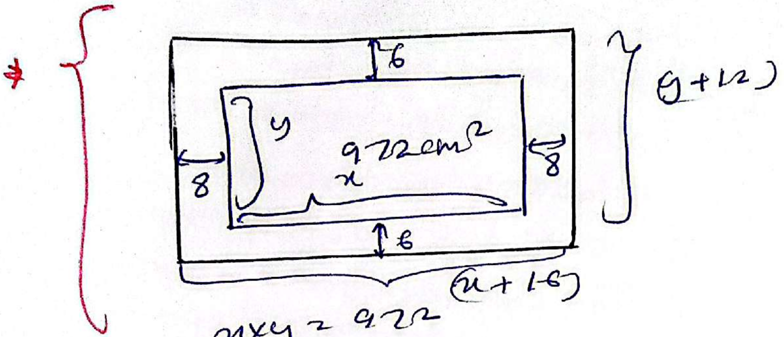


$\theta = \pi/4$ හිදී y හි උපරිමයක් ලැබේ

වර්ගඵලය උපරිමය $= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 2$

2004 A/L



$x \times y = 972$

$y = \frac{972}{x}$

කඩදාසි වර්ගඵලය = y ලෙස ගනිමු.

$y = (y+12)(x+16)$

$y = \left(\frac{972}{x}+12\right)(x+16)$

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{972}{x}+12\right)[1] + (x+16)\left[972\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right]$

$= \left(\frac{972}{x}+12\right) + (x+16)\left(\frac{-972}{x^2}\right)$

$= \frac{972}{x} + 12 - \frac{972}{x} - \frac{972.16}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = 12 - \frac{972.16}{x^2}$

වර්ගඵලය උපරිමයක් හෝ අවමයක් වීමට $\frac{dy}{dx}$ ශූන්‍ය විය යුතුය

$0 = \frac{12x^2 - 972.16}{x^2}$ $[\because x > 0]$

$12x^2 = 972.16$

$x^2 = \frac{972}{3}.4$

$x^2 = 324.4$

$x = 2\sqrt{324}$

$x = 2.18$

$x = 36$

$6 \overline{)486}$ … 36, 126

$5 \overline{)324}$ … 28, 74

	$0 < x < 36$	$x = 36$	$x > 36$
$\frac{dy}{dx}$	(−)		(+)

අවමයක් වේ

කඩදාසියේ පළල $= x+16 = 36+16$

$\Rightarrow 52$ cm

දිග $= \frac{972}{36} + 12 = 39$ cm

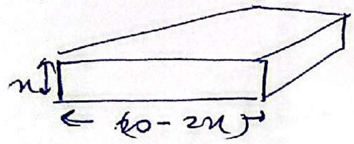
Note • වර්ගඵලය උපරිම
ආශ්‍රිත ඍජුකෝණාස්‍රය සෑදීමට
කඩදාසි වර්ගඵලය උපරිමවේ

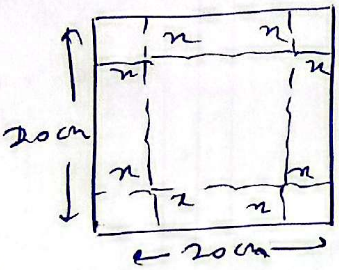
* පෙට්ටියක් සෑදීමට අවශ්‍ය ද්‍රව්‍ය
ඍජුකෝණාස්‍රාකාර ... වර්ගඵලය
අවම වීමයි

* " " " අවම වියදමක්
" " " වර්ගඵලය
අවම වීමය

• වියදම අවම වීම / ...
එකමවතුවෙ ද්‍රව්‍ය ...
එක එක ...

① පාදයක් 20cm වූ සමචතුරස්‍රාකාර
කාඩ්බෝඩ් කොළයක
කෝණවල කොටු එක සමාන ප්‍රමාණ
වූ සමචතුරස්‍ර කපා ඉවත්
කර පෙට්ටියක් සාදා ගනී.
උඩ පියනක් නැති පෙට්ටියක් ආකාරයට
සකසනු ලැබේ. පෙට්ටියේ පරිමාව උපරිම
වීමට කපා ඉවත් කළ සමචතුරස්‍රයේ
පාදයේ දිග සොයන්න.





පරිමාව = y ලෙස ගනිමු.

$y = (x)(20-2x)^2$

~~$y = (20x - 2x^2)^2$~~

$y = x(20-2x)^2$

~~$\frac{dy}{dx} = x\,2[-2.1] + (20-2x)^2.1$~~

~~$\frac{dy}{dx} = (20-2x)^2 - 4x$~~

~~y උපරිමයක් හෝ අවමයක් වීමට $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය~~

~~$0 = (20-2x)^2 - 4x$~~

~~$0 = 400 - 80x + 4x^2 - 4x$~~

~~$0 = 400 + 4x^2 - 84x$~~

~~$0 = x^2 - 21x + 100$~~

$y = x(\cancel{20-2x})^2$

$\frac{dy}{dx} = x[2(20-2x).(-2)] + (20-2x)^2.1$

$= (20-2x)[-4x + 20 - 2x]$

$\frac{dy}{dx} = (20-2x)[20-6x]$

y උපරිමයක් හෝ අවමයක් වීමට $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$0 = (20-2x)(20-6x)$

$x = 10$ හෝ $x = \frac{20}{6}$, $x = \frac{10}{3}$

$x > 0$

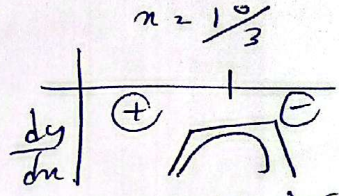
$20 - 2x > 0$

$20 > 2x$

$x < 10$

$\therefore x \neq 10$

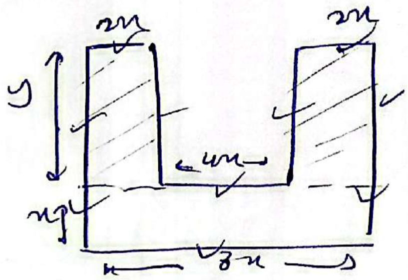
$x = \frac{10}{3}$



y උපරිමයකි.

∴ පාදයේ දිග $= \frac{10}{3}$ cm

2013 A/L



$800 = 2(2x \times y) + (8x \times x)$

$800 = 4xy + 8x^2$

$200 = xy + 2x^2$

$\left(\frac{200 - 2x^2}{x}\right) = y$

$P = 2(8x) + 2(y + x) + 2y$

$P = 16x + 2\left[\frac{200 - 2x^2}{x} + x\right] + 2y$

$= 16x + 2x + \frac{400}{x} - 4x + \frac{400}{x} - 4x$

$= 10x + \frac{800}{x}$

$P = \frac{800}{x} + 10x$

$x > 0$ විය යුතුය — ①

$y > 0$ විය යුතුය

$\frac{200 - 2x^2}{x} > 0$

$200 > 2x^2$

$10 > x$ — ②

① හා ② න්

$0 < x < 10$

$$\frac{dP}{dx} = 800\left(\frac{-1}{x^2}\right) + 10 \cdot 1$$

$$= 10 - \frac{800}{x^2}$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{10x^2 - 800}{x^2}$$

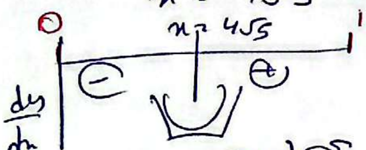
P අවමයක් හෝ උපරිමයක් වීමට $\frac{dP}{dx} = 0$ විය යුතුය

$10x^2 = 800$

$x^2 = 80$

$x = 2\sqrt{20}$

$x = 4\sqrt{5}$ m



P අවමයකි

$$P_{min} = \frac{800}{4\sqrt{5}} + 10 \times 4\sqrt{5}$$

$= 40\sqrt{5} + 40\sqrt{5}$

$= 80\sqrt{5}$ m

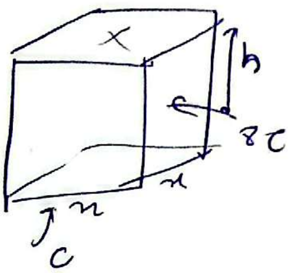
x	$0 < x < 4\sqrt{5}$	$4\sqrt{5} < x < 10$
$\frac{d(P)}{dx}$	(−)	(+)
	P අඩුවේ	P වැඩිවේ

∴ $x = 4\sqrt{5}$ වලදී P අවමයක් වේ

2005 A/L

$256 = x^2 h$

$h = \frac{256}{x^2}$



පිරිවැය = C' ලෙස ගනිමු.

$C' = x^2 c + 4xh \cdot 8c$

$C' = x^2 c + 4x \cdot \frac{256}{x^2} \cdot 8c$

$C' = x^2 c + \frac{8 \cdot 4 \cdot 256}{x} c$

$$\frac{d(C')}{dx} = c \cdot 2x - \frac{8 \cdot 4 \cdot 256 c}{x^2}$$

එනම්

$$\frac{d(C')}{dx} = \frac{2cx^3 - 8 \cdot 4 \cdot 256 \cdot c}{x^2}$$

C' අවමයක් හෝ උපරිමයක් වීමට $\frac{d(C')}{dx} = 0$ විය යුතුය

$8 \cdot 4 \cdot 256 \cdot c = 2cx^3$ [∵ $c > 0$]

$16 \cdot 256 = x^3$

$2\sqrt{2.256} = x^3$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = x$

$x = 16$ cm

x	$0 < x < 16$	$16 < x$
	(−)	(+)
	C' අඩුවේ	C' වැඩිවේ

∴ $x = 16$ දී C' අවමයක් වේ

මාන = පාදයේ දිග = 16 cm

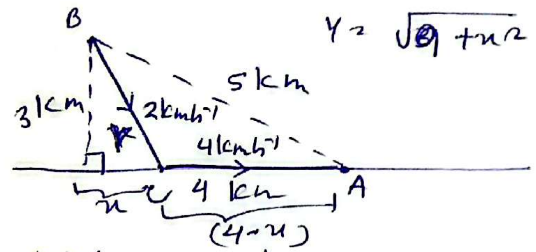
උස = $\frac{256}{16 \times 16} = \frac{16}{16}$ = 1 cm

Note: මෙවැනි ගැටලුවලදී

වේගය = දුර / කාලය
$V = \frac{S}{t}$

පොදු සමීකරණ

(Q1) මිනිසෙක් ගංගා ඉවුරේ සිට 3km දුරින් නැංගුරම් ලා ඇති ඔරුවක සිටියි. ඔහුගේ ස්ථානයේ සිට 5km දුරින් ගං ඉවුරේ පිහිටි ලෙනෙහි වෙත ඉක්මනින් යාමට ඔහුට අවශ්‍ය වී ඇත. ඔහුට ඔරුව පැදීම 2kmh⁻¹ වේගයෙන් ද ගං ඉවුර දිගේ ගමන් කිරීම 4kmh⁻¹ වේගයෙන් ද කළ හැකි නම්, ලෙනෙහි වෙත ඉක්මනින් ළඟාවීම සඳහා ඔහු ඉවුරේ කුමන ස්ථානයකට ඔරුවෙන් ගොඩබැසිය යුතුද?



B → C

$s = ut$

$y = 2 \times t_1$

$t_1 = \frac{\sqrt{9+x^2}}{2}$

C → A

$s = ut$

$t_2 = \frac{(4-x)}{4}$

කාලය = y ලෙස ගනිමු

$y = t_1 + t_2$

$y = \frac{\sqrt{9+x^2}}{2} + \frac{(4-x)}{4}$

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{9+x^2}} \cdot 2x\right) + \frac{1}{4}(-1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{4}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - \sqrt{9+x^2}}{4\sqrt{9+x^2}}$

y අවමයක් හෝ උපරිමයක් සඳහා $\frac{dy}{dx} = 0$ විය යුතුය

$\sqrt{9+x^2} = 2x$

$9+x^2 = 4x^2$

$9 = 3x^2$

$x = \sqrt{3}$

x	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$\frac{dy}{dx}$	(−)	= 0	(+)

∴ $x = \sqrt{3}$ වන විට y අවමයකි

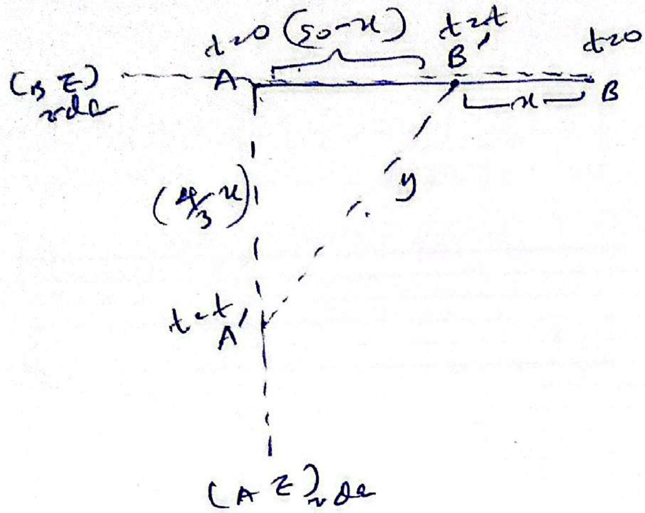
∴ ගමනාරම්භය සිට $\sqrt{3}$ km දුරින් ගොඩ බැසිය යුතුය

(28) දහවල් 12.00 ට A නැව නැවතුම් තැනෙන් දකුණින් 50km දුරින් B නැව නැවතුම් තැනක් පිහිටයි. මෙවිට A නැව 16 kmh⁻¹ වේගයෙන් උතුරු දිශාවට යාත්‍රා කරමින් තිබෙන අතර B නැව 12 kmh⁻¹ වේගයෙන් බටහිර දිශාවට යාත්‍රා කරමින් තිබේ. මෙම චලිතයේදී නැව් දෙකක් අතර ආසන්නම වන වේලාවත්, එවිට නැව් දෙක අතර දුර කොපමණ

12.00 A ——— B 12.00

⟵ 50km ⟶

$(A \vec{E}) = 16$ $(B \vec{E}) = 12$



$B \to B'$

$s = ut$

$x = 12 \times t$

$t = \frac{x}{12}$

$A \to A'$

$s = ut$

$s = 16 \times \frac{x}{12}$

$s = \frac{4}{3}x$

y ලෙස ගනිමු

$y^2 = (50-x)^2 + \frac{16}{9}x^2$

$y = \sqrt{(50-x)^2 + \frac{16}{9}x^2}$

$y = \sqrt{2500 - 100x + \frac{9x^2}{9} + \frac{16}{9}x^2}$

$y = \sqrt{2500 - 100x + \frac{25}{9}x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2500 - 100x + \frac{25}{9}x^2}} \cdot \left[-100 + \frac{25}{9} \cdot 2x\right] = 0$

$\frac{dy}{dx} = 0$ වන විට y අවම වේ

$100 = \frac{2 \cdot 25}{9} x$

$18 = x$

$x = 18$

x	$0 < x < 18$	$x = 18$	$x > 18$
$\frac{dy}{dx}$	(-)	$= 0$	(+)

$\therefore x = 18$ දී y අවමයකි

$t = \frac{18}{12}$

$t = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ h

වේලාව = 12.00 + 1.30

= 1.30 ප.ව.

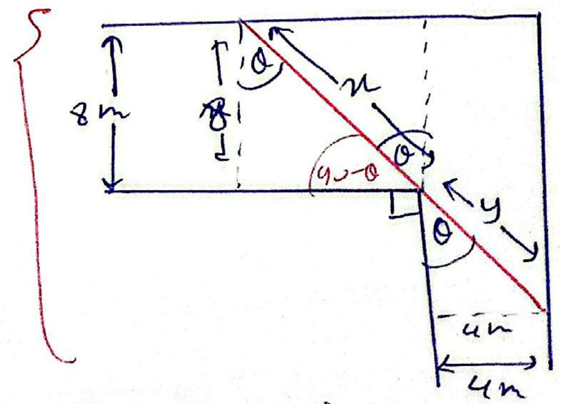
$y = \sqrt{(50-18)^2 + \frac{16}{9} \times 18 \times 18}$

$= \sqrt{(32)^2 + \frac{18^2 \cdot 4^2}{3^2}}$

$= \sqrt{1024 + \frac{324 \cdot 16}{9}}$

$= 40$ km

(Q3) 8m පළල කොරිඩෝව 4m පළල කොරිඩෝවට ...



$z = x + y$

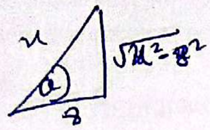
$\cos\theta = \frac{8}{x}$

$\sin\theta = \frac{4}{y}$

$z = x + y$

$y = \dfrac{4}{\sin\theta}$

$z = x + \dfrac{4}{\sin\theta}$



$z = x + \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 - 8^2}}$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-8^2}}{x}$

$\dfrac{dz}{dx} = 1 + \left[(\sqrt{x^2-8^2}).4 - 4x \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-8^2}} . 2x\right]$

$= 1 + 4\sqrt{x^2-8^2} - \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-8^2}}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2-8^2} + 4(x^2-8^2) - 4x^2}{\sqrt{x^2-8^2}}$

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\sqrt{x^2-8^2} - 4.8^2}{\sqrt{x^2-8^2}}$

z අවමයක් සඳහා $\dfrac{dz}{dx} = 0$ විය යුතු

$4.8^2 = \sqrt{x^2-8^2}$

$(4.8^2)^2 = x^2 - 8^2$

$x^2 = 4^2.8^4 - 8^2$

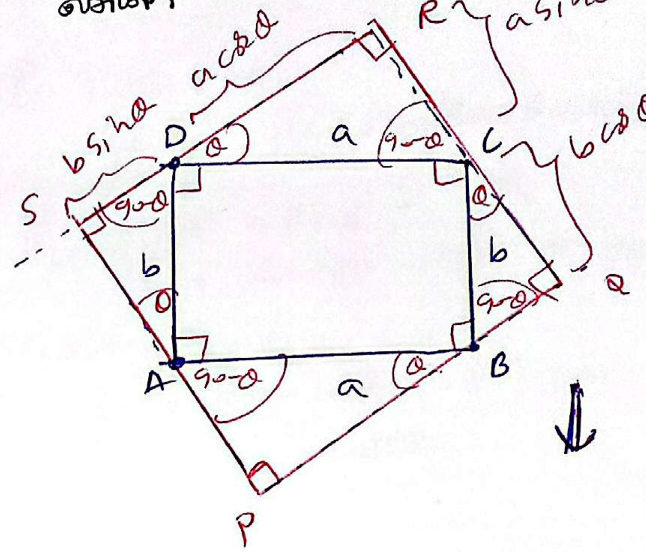
$x = \sqrt{8^2(4^2.8^2 - 1)}$

$x = 8\sqrt{(4.8-1)(4.8+1)}$

$= 8\sqrt{31.33}$

$x = 8\sqrt{1023}$

(15) ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයක AB = a ද, BC = b ද වේ. මෙම ශීර්ෂ හරහා යන, සෘජුකෝණාස්‍රයේ පාද ස්පර්ශ වන විශාලතම සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ බව පෙන්වන්න.



වර්ගඵලය = y ලෙස ගනිමු.

$y = (b\sin\theta + a\cos\theta)(a\sin\theta + b\cos\theta)$

$\dfrac{dy}{d\theta} = (b\sin\theta + a\cos\theta)[a(\cos\theta) + b(-\sin\theta)] + (a\sin\theta + b\cos\theta)(b\cos\theta + a(-\sin\theta))$

$= [a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta] + [b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta]$

$= (a^2)[\cos^2\theta - \sin^2\theta] + (b^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\dfrac{dy}{d\theta} = (a^2+b^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\dfrac{dy}{d\theta} = (a^2+b^2)\cos 2\theta$

$0 = \cos 2\theta$ $\quad (a^2+b^2) \neq 0$

$\cos 2\theta = \cos 90$

$2\theta = 90$

$\theta = 45°$

$\theta = 45°$

$\dfrac{dy}{d\theta}$

y උපරිමයක්

$\theta = 45°$

$y = \left(\dfrac{b}{\sqrt2} + \dfrac{a}{\sqrt2}\right)\left(\dfrac{a}{\sqrt2} + \dfrac{b}{\sqrt2}\right)$

$= \dfrac{ab}{2} + \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{ab}{2}$

$= \dfrac{2ab}{2} + \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{a^2}{2}$

$y = \dfrac{1}{2}(a+b)^2 = \dfrac{(a+b)^2}{2}$

(20) එක්තරා විදුලි උපකරණයක් රු.300 බැගින් විකුණන විට මාසයකට එවැනි උපකරණ 100ක් අලෙවි කරගත හැක. මිල අඩු කිරීමේදී සෑම රු.10 කටම වැඩිපුර උපකරණ 5ක් මාසයකට විකිණීමට හැකි බව සොයාගෙන ඇත. මාසයකට, එවිට ආදායම උපරිම වන ලෙස උපකරණයක විකුණුම් මිල කොපමණ විය යුතුද? එවිට විකිණෙන උපකරණ සංඛ්‍යාව කොපමණද?

මිල	ගණන
300	100
290	105
280	1010

ආදායම = (උපකරණ ගණන) × (උපකරණයක මිල)

ආදායම = y ලෙස ගනිමු

$y = (100 + 5x)(300 - 10x)$

$y = (100 + 5x)(300 - 10x)$

$\frac{dy}{dx} = (100 + 5x)(-10) + (300 - 10x)(+5)$

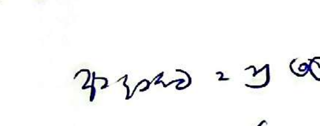
$= -1000 - 50x + 1500 - 50x$

$\frac{dy}{dx} = 500 - 100x$

$\frac{dy}{dx} = 0$ නම්

$0 = 500 - 100x$

$x = 5$



විකුණුම් මිල $= 300 - 10 \times 5$
$= 300 - 50$
$=$ රු.250

ගණන $= 100 + 5 \times 5$
$= 125$

03 සීඝ්‍රතා ආශ්‍රිත ගැටලු

* යම් රාශියක් කාලය සමඟ වෙනස් වන වේගය, එම රාශියේ වෙනස්වීමේ සීඝ්‍රතාවයයි.

$\frac{d▨}{dt}$ = ▨ වෙනස්වීමේ සීඝ්‍රතාව

(1) අරය r නම්,
$\frac{dr}{dt}$ = අරය වෙනස්වීමේ සීඝ්‍රතාවය

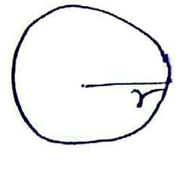
(2) වර්ගඵලය = A නම්,
$\frac{dA}{dt}$ = වර්ගඵලය වෙනස්වීමේ සීඝ්‍රතාව

(3) වේගය = v නම්,
$\frac{dv}{dt}$ = වේගය වෙනස්වීමේ සීඝ්‍රතාවය = a ත්වරණය

$a = \frac{dv}{dt}$

Note: වෙනස්වීමේ සීඝ්‍රතාවයෙන් වැඩිවීම ⊕ මගින්ද අඩුවීම ⊖ මගින්ද දක්වයි.

උදා: ගෝලාකාර බැලූනයක අරය වැඩි වේ. සීඝ්‍රතාව $1 km s^{-1}$ වේ. අරය 1000 km වන විට වර්ගඵලය වෙනස්වීමේ සීඝ්‍රතාව



$\frac{dr}{dt} = 1 km s^{-1}$

$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=1000}$ වන විට,

$A = 4\pi r^2$

$\frac{dA}{dr} = 4\pi \cdot 2r \frac{dr}{dt}$

$\frac{dA}{dr} = 8\pi \cdot r \times 1$

$\frac{dA}{dr} = 8\pi \times 1000 \times 1$

$= 8000\pi km^2 s^{-1}$

සීඝ්‍රතා ආශ්‍රිත ගැටලුවලට උදා - [illegible]

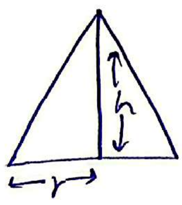
① වස්තුවක අවස්ථාවක දී කාලයත් සමඟ විස්ථාපනය වෙනස්වීම

② ද්‍රව්‍ය හා ගොඩනැගිලි ද්‍රව්‍ය වැනි ද්‍රව්‍ය ... ගොඩගැසීම හා t කාලයත් සමඟ ... [illegible]

2 ප්‍ර ② ~~[illegible]~~

සිරස් අක්ෂය සිරස් වන සේ පොළොවේ ... වැලි වැටීමෙන් වැලි ගොඩක් ආකාරයට ගොඩගැසෙන අතර අරය හා උස අනුපාතය 6 : 1 වේ. වැලි වැටීමේ සීඝ්‍රතාව $10 m^3 s^{-1}$ වේ. වැලි ගොඩේ අරය 50 m වන විට . වැලි ගොඩේ උස වැඩිවීමේ සීඝ්‍රතාව

$\frac{r}{h} = \frac{6}{1}$



$r = 6h$

$\frac{dV}{dt} = 10 m^3 s^{-1}$

$r = 50 m$ විට

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

~~$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi 2r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dh}{dt}$~~

~~$10 = \frac{\pi}{3} \times 2 \times 50 \times 1$~~

$V = \frac{1}{3}\pi 36 h^3$ (36 ඉවත් කර 12)

$V = 12\pi h^3$

$\frac{dV}{dt} = 12\pi 3 . h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{10}{36\pi h^2}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{10 \cdot 36}{36\pi r^2}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{10}{\pi \times 2500}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{250\pi} m s^{-1}$ //

③ වස්තුවක t කාලයකදී විස්ථාපනය S වේ. $S = t^3 + 5t^2 + 2$ වේ.

i) (t) ~~=~~ දී ප්‍රවේගය

ii) $t = 3$ දී ත්වරණය

ප්‍රවේගය = v නම්

$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 10t$

ත්වරණය = a නම්

$a = \frac{dv}{dt} = 6t + 10$

i) $t = 1$

$v = 3\times1 + 10\times1$

$v = 13 m s^{-1}$

ii) $t = 3$

$a = 6\times3 + 10$

$= 28 m s^{-2}$ //

④ විස්ථාපනය = x වේ, $x = 4t^3 - 3t^2 - 24$ වේ.

i) චලනය ආරම්භයේදී ප්‍රවේගය

ii) නිශ්චල වන කාලය

ප්‍රවේගය = v නම්

$v = \frac{dx}{dt} = 12t^2 - 6t$

ත්වරණය = a නම්

$a = \frac{dv}{dt} = 24t - 6$

i) චලනය ආරම්භයේදී $t = 0$ නිසා

$v = 12\times0 - 6\times0$

$v = 0$

ii) නිශ්චල වන විට $v = 0$ නිසා

$0 = 12t^2 - 6t$

$2t = 1$

$t = \frac{1}{2} s$ //

සීඝ්‍රතා ආශ්‍රිත ගැටළුවලදී - [illegible]

① කාලයත් අනුබද්ධව දුර වෙනස්වීම [illegible]

② [illegible]

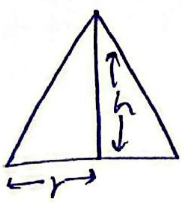
2 ප්‍රශ්නය ② ~~[illegible]~~

සිරස් පොළොවක, තිරස් පොළොවක් මත වැලි වැටේ වැලි ගොඩක් කේතුවක් ආකාරව ගොඩගැසෙයි. එහි අරය හා උසෙහි අනුපාතය 6 : 1 වේ. වැලි වැටීමේ සීඝ්‍රතාව $10 m^3 s^{-1}$ වේ. වැලි ගොඩේ අරය 50m වනවිට. වැලි ගොඩේ උස වැඩිවීමේ සීඝ්‍රතාව

$\frac{r}{h} = \frac{6}{1}$

$r = 6h$

$\frac{dV}{dt} = 10 m^3 s^{-1}$



r = 50m දී

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

~~$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi 2r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dh}{dt}$~~

~~$10 = \frac{\pi}{3} \times 2 \times 50 \times 1$~~

$V = \frac{1}{3}\pi \cancel{36}^{12} h^3$

$V = 12\pi h^3$

$\frac{dV}{dt} = 12\pi 3 \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{10}{36\pi h^2}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{10 \cdot 36}{36\pi r^2}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{10}{\pi \times 2500}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{250\pi} ms^{-1}$

③ අංශුවක t කාලයකදී විස්ථාපනය S වේ. $S = t^3 + 5t^2 + 2$ වේ.

i) x(t) = 1 දී ප්‍රවේගය

ii) t = 3 දී ත්වරණය

ප්‍රවේගය = v නම්

$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 10t$

ත්වරණය = a නම්

$a = \frac{dv}{dt} = 6t + 10$

i) t = 1

$v = 3\times1 + 10\times1$

$v = 13 ms^{-1}$

ii) t = 3

$a = 6\times3 + 10$

$= 28 ms^{-2}$

④ විස්ථාපනය = x වේ, $x = 4t^3 - 3t^2 - 24$ වේ

i) ආරම්භක ප්‍රවේගය

ii) නිශ්චල වන කාලය

ප්‍රවේගය = v නම්

$v = \frac{dx}{dt} = 12t^2 - 6t$

ත්වරණය = a නම්

$a = \frac{dv}{dt} = 24t - 6$

i) ආරම්භක ප්‍රවේගය t = 0 විට

$v = 12\times0 - 6\times0$

$v = 0$

ii) නිශ්චල වන විට v = 0 විට

$0 = 12t^2 - 6t$

$2t = 1$

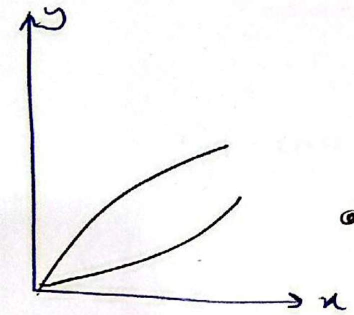
$t = \frac{1}{2} s$

④ අසමානතා ආකාරය

(වැඩිවන/අඩුවන ලෙස ආකාරයෙන්)

$x=0$ විට, $y=0$ වන ශ්‍රිතයක් ගත හැකි වේ නම් y වල හැසිරීම $\frac{dy}{dx}$ මගින් සොයාගත හැකියි

01 $\frac{dy}{dx} > 0$ වන විට වක්‍ර

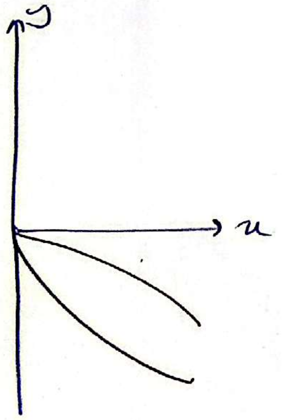


$\frac{dy}{dx} > 0$ නම්

$y > 0$ වේ

මෙහි y වැඩිවන ශ්‍රිතයක් ලෙස හැඳින්වේ

02 $\frac{dy}{dx} < 0$ වන විට වක්‍ර



$\frac{dy}{dx} < 0$ නම්

$y < 0$ වේ

මෙහි y අඩුවන ශ්‍රිතයක් ලෙස හැඳින්වේ

Note: මෙවැනි අසමානතාවයක් සාධනය කිරීමේදී සියලු පද එක පැත්තකට ගෙන >0 / <0 ලෙස සැකසිය යුතුය

② $x>0$ විට $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ බව පෙන්වන්න

$\underbrace{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}_{=y \text{ ලෙස ගනිමු}} > 0$

$y = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)} \cdot 1 - 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x$

$= \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{(1+x)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\underbrace{(1+x)}_{>0}}$ $[\because x>0 \text{ වේ}]$

$\frac{dy}{dx} > 0$

$\therefore$ වැඩිවන ශ්‍රිතයක් නිසා $y > 0$ වේ

$\ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x > 0$

$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$

③ $x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1}x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

$x>0$ වේ, සාධනය කරන්න

$\underbrace{x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1}x}_{=①} \quad \underbrace{< x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}}_{=② \text{ ලෙස ගනිමු}}$

①

$\underbrace{-\tan^{-1}(x) + x - \frac{x^3}{3}}_{=y} < 0$

$y = x - \frac{x^3}{3} - \tan^{-1}x$

$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - \frac{1}{(1+x^2)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + x^2 - x^2 - x^4 - 1}{(1+x^2)}$

$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{-x^4}{\underbrace{(1+x^2)}_{>0}}}_{<0}$

$\frac{dy}{dx} < 0$

$\therefore \quad y < 0$

$x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1}x$ — ①

② / $\underbrace{\tan^{-1}x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}}_{y} < 0$

$y = \tan^{-1}x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} - 1 + \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - \frac{1}{5}\cdot 5x^4$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2 + 1 + 3x^4 + 3x^2 - 5x^5 - 5x^4}{(x^2+1)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2x^4 - 5x^5}{(x^2+1)} - x^6$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^6}{(x^2+1)}$

$(x^2+1) > 0$

$-\frac{x^6}{(x^2+1)} < 0$

$\frac{dy}{dx} < 0$

$\therefore y < 0$

$\tan^{-1}x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} < 0$ — (II)

② in (II) ⇒

$x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1}x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

(7) දෛශික ප්‍රයෝජනයන්

මතක තබා ගන්න; (1) ස්ථාන දෛශිකය $x\underline{i} + y\underline{j}$ නම්

x, y ඛණ්ඩාංක වේ.

උදා: $\overrightarrow{OP} = x\underline{i} + y\underline{j}$ නම් $P = (x, y)$

(2) ප්‍රවේගය $= x\underline{i} + y\underline{j}$ නම්

x හා y යනු $\underline{i}$ $\underline{j}$ දිශාවට ප්‍රවේග වේ.

උදා: $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$V = \sqrt{x^2 + y^2}$

උදා: $({}_A V_E) = \underline{i} + 2\underline{j}$

$({}_B V_A) = 3\underline{i} + \underline{j}$

$({}_C V_A) = 2\underline{i} + 3\underline{j}$ $({}_B V_E)$,

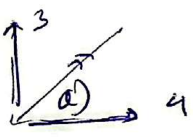
$({}_C V_E)$ සොයන්න

$({}_B V_E) = ({}_B V_A) + ({}_A V_E)$

$= 3\underline{i} + \underline{j} + \underline{i} + 2\underline{j}$

$= 4\underline{i} + 3\underline{j}$

$({}_B V_E) = 4\underline{i} + 3\underline{j}$



$\tan\theta = 3/4$

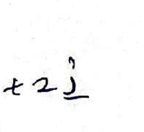
$({}_B V_E) = \sqrt{16 + 9}$

$= 5$

$({}_C V_E) = ({}_C V_A) + ({}_A V_E)$

$= 2\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{i} + 2\underline{j}$

$= 3\underline{i} + 5\underline{j}$



$\tan\alpha = 5/3$

$({}_C V_E) = \sqrt{34}$

උදා: A, B නැව් දෙකක ප්‍රවේග පිළිවෙලින් $8(2\sqrt{3}\,\underline{i} + \underline{j})\ kmh^{-1}$ හා $2(\sqrt{3}\,\underline{i} - 3\underline{j})\ kmh^{-1}$ වේ. මේවායේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් දහවල් 12ට $4(-\underline{i} + \sqrt{2}\,\underline{j})$ km හා $12(\underline{i} + \sqrt{2}\,\underline{j})$ වේ.

i) A ට සාපේක්ෂව B හි ප්‍රවේගය සොයන්න

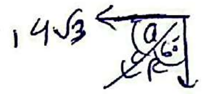
ii) A හා B අතර කෙටිම දුර $= 4(\sqrt{6} - 2)$ km බව පෙන්වා ඒ සඳහා ගතවන කාලය සොයන්න.

(i) $({}_B V_A) = ({}_B V_E) + ({}_E V_A)$

$= ({}_B V_E) - ({}_A V_E)$

$= 2\sqrt{3}\,\underline{i} - 6\underline{j} - 16\sqrt{3}\,\underline{i} - 8\underline{j}$

$= -14\sqrt{3}\,\underline{i} - 14\underline{j}$



$R = \sqrt{14^2 + 14^2 \cdot 3}$

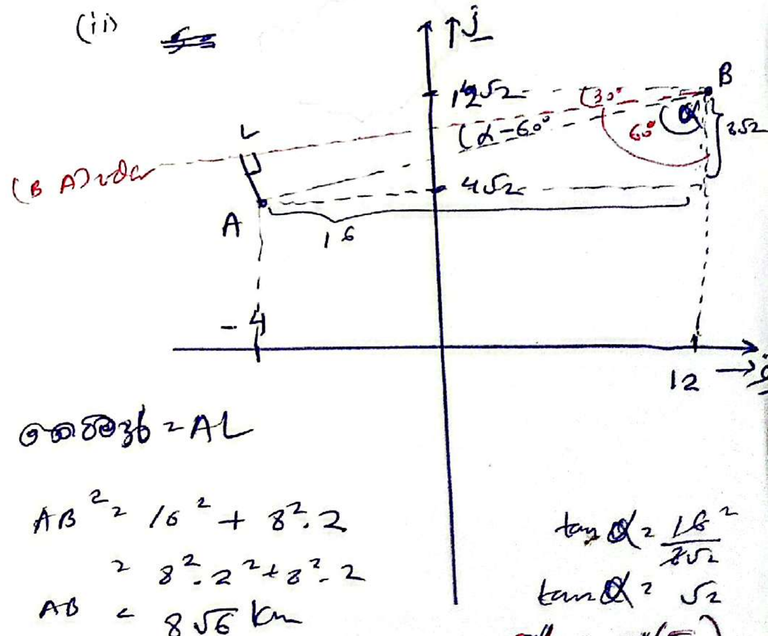
$R = 14 \cdot 2$

$R = 28\ kmh^{-1}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = 30°$

(ii)



කෙටිම දුර $= AL$

$AB^2 = 16^2 + 8^2 \cdot 2$

$= 8^2 \cdot 2^2 + 8^2 \cdot 2$

$AB = 8\sqrt{6}$ km

$\tan\alpha = \frac{16}{8\sqrt{2}}$

$\tan\alpha = \sqrt{2}$

$\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{2})$

$\sin(\alpha - 60°)$

$= \sin\alpha\cos 60° - \cos\alpha\sin 60°$

$= \sin\alpha \times \frac{1}{2} - \cos\alpha \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{16}{8\sqrt{6}} \times \frac{1}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} > \sqrt{2}$

$\therefore \tan 60° > \tan\alpha$

$60° > \alpha$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$ ...

$\sin(\alpha - \theta) = \frac{\sqrt{6} - 2}{2\sqrt{6}}$

ক্ষেত্রফল = AL

$= 8\sqrt{6} \times \sin(\alpha - \theta)$

$= 8\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}$

$= 4(\sqrt{6}-2)$ km

প্রমাণ: $\frac{S}{4}$

$= \frac{BL}{4}$

$= \frac{BL}{4}$

ප්‍රථම මූලධර්ම මගින් අවකලනය

(මූලධර්ම මගින් අවකලනය)

$y = f(x)$ ලෙස ශ්‍රිතයක් සලකමු. x හි සුළු δx ප්‍රමාණයක වැඩිවීමකට (වර්ධනයකට) y හි වෙනස්වීම δy ලෙස ගනිමු.

සාධනය:
$$y = f(x) \quad \text{—①}$$
$$y + \delta y = f(x + \delta x) \quad \text{—②}$$

② − ①
$$\delta y = f(x+\delta x) - f(x)$$

$\div \delta x$
$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

δx ශූන්‍යයට ළඟා වන විට $\delta x \to 0$ වේ, සීමාව ගනිමු.

$$\underbrace{\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}}_{\frac{dy}{dx}} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}}$$

* අවකලනය සම්බන්ධ සූත්‍ර භාවිතයෙන් තොරව අවකලනය කිරීම ප්‍රථම මූලධර්ම මගින් අවකලනය කිරීම ලෙස හැඳින්වේ.

Note:
① $f(x) = x^2$
$f(x+\delta x) = (x+\delta x)^2$

② $f(x) = e^x$
$f(x+\delta x) = e^{(x+\delta x)}$

③ $f(x) = \cos(4x)$
$f(x+\delta x) = \cos(4x + 4\delta x)$

2. පහත දී ඇති ශ්‍රිත ප්‍රථම මූලධර්ම මගින් අවකලනය කරන්න.

(I) $y = \underbrace{x^2}_{f(x) \text{ ලෙස ගනිමු}}$

$f(x) = x^2$
$f(x+\delta x) = (x+\delta x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$
$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{\delta x}$$
$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{2\delta x . x + (\delta x)^2}{\delta x}$$
$$= \lim_{\delta x \to 0} 2x + \delta x$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x + 0$$
$$= 2x$$

(II) $y = x^3$

$f(x) = x^3$
$f(x+\delta x) = (x+\delta x)^3$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$
$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{3x^2\delta x + 3x(\delta x)^2}{\delta x}$$
$$= 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2$$

(III) $y = \underbrace{\sqrt{x}}_{= f(x)}$

$f(x) = \sqrt{x}$
$f(x+\delta x) = \sqrt{(x+\delta x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\delta x)} - \sqrt{x}}{\delta x}$$

~~$= \sqrt{x} [\sqrt{\ }$~~

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{((\sqrt{x+\delta x})^2 - (\sqrt{x})^2)}{\delta x(\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})}$$

(ප්‍රකාශනයෙන් ගුණ කිරීම)

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta x}{\delta x(\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(i) $y = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f(x+\delta x) = \frac{1}{(x+\delta x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(x+\delta x)} - \frac{1}{x}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x - (x+\delta x)}{(x+\delta x)x} \Big/ \delta x$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\delta x)x}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

(ii) $y = \underbrace{x^2 + 5x}_{f(x)}$

$f(x) = x^2 + 5x$

$f(x+\delta x) = (x+\delta x)^2 + 5(x+\delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{[(x+\delta x)^2 + 5(x+\delta x)] - [x^2 + 5x]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\delta x + (\delta x)^2 + 5x + 5\delta x - x^2 - 5x}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} 2x + \delta x + 5$$

$$= 2x + 0 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5$$

(iii) $y = \underbrace{\sin x}_{f(x)}$

$f(x) = \sin x$

$f(x+\delta x) = \sin(x+\delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin(x+\delta x) - \sin x}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{2\cos\left[\frac{(x+\delta x)+x}{2}\right]\sin\left[\frac{(x+\delta x)-x}{2}\right]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{2\left(\frac{\delta x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)$$

$$\cos x$$

(iv) $y = \sin 4x$

$f(x) = \sin 4x$

$f(x+\delta x) = \sin 4(x+\delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin[4x + 4\delta x] - \sin 4x}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{2\cos\left[\frac{4x + 4\delta x + 4x}{2}\right]\sin\left[\frac{4x + 4\delta x - 4x}{2}\right]}{\delta x}$$

$$= 4\cos(4x + 0)$$

$$= 4\cos 4x$$

(viii) $y = \cos 3x$

$f(x) = \cos 3x$

$f(x+\delta x) = \cos(3x+3\delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\cos(3x+3\delta x) - \cos 3x}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{3x+3\delta x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-(3x+3\delta x)}{2}\right)}{\delta x}$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{\delta x \to 0} \frac{2\sin\left(3x+\frac{3\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{-3\delta x}{2}\right)}{-\frac{3}{2}\delta x}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot 2\sin\left(3x+\frac{3\delta x}{2}\right)$$

$$= -3\sin(3x)$$

(ix) $y = \operatorname{cosec} x$

$f(x) = \operatorname{cosec} x$

$f(x+\delta x) = \operatorname{cosec}(x+\delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\operatorname{cosec}(x+\delta x) - \operatorname{cosec} x}{\delta x}$$

sin, cos tan করে নিতে হবে

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin x - \sin(x+\delta x)}{\sin(x+\delta x)\sin x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin x - \sin(x+\delta x)}{\delta x \sin(x+\delta x)\sin x}$$

$$= -\frac{1}{\delta}\lim_{\delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{\delta x}{2}\right)}{-\frac{\delta x}{2}\sin(x+\delta x)\sin x}$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

(x) $y = \tan 2x$

$f(x) = \tan 2x$

$f(x+\delta x) = \tan(2x+2\delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\tan(2x+2\delta x) - \tan 2x}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\frac{\sin(2x+2\delta x)}{\cos(2x+2\delta x)} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{2\sin(2\delta x)}{2\delta x \cos(2x+2\delta x)\cos 2x}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos(2x)} \cdot \frac{1}{\cos 2x}$$

$$= 2\sec^2 2x$$

(xi) $y = \sin^2 2x$

$f(x) = \sin^2 2x$

$f(x+\delta x) = \sin^2(x+\delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin^2(x+\delta x) - \sin^2 2x}{\delta x}$$

বইয়ে এভাবে করা আছে

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{(\sin(x+\delta x) - \sin 2x)(\sin(x+\delta x)+\sin 2x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} 2\left[\cos\left(2x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right] \cdot 2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta x}{2}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right) \cdot 1 \cdot 2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta x}{2}\right)$$

$$= 2\sin x \cos x$$

$$= \sin 2x$$

(7) $y = x \sin x$

$f(x) = x \sin x$

$f(x+\delta x) = (x+\delta x)\sin(x+\delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)\sin(x+\delta x) - x\sin x}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x\sin(x+\delta x) - x\sin x + \delta x \sin(x+\delta x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x[\sin(x+\delta x) - \sin x] + \delta x \sin(x+\delta x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left[x\frac{(\sin(x+\delta x) - \sin x)}{\delta x} + \sin(x+\delta x) \right]$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x \cdot 2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right) + \sin(x+\delta x)}{x \cdot \frac{\delta x}{2}}$$

$$x \cdot \cos x + \sin x$$

$$x\cos x + \sin x$$